






AQUILA NON CAPTAT MUSCAS

INCLINATIONVM APPENDIX

Seù TÒ GEOMETRIÆ ΠΛΗΡΩΜΑ

PER

ANTONIVM SANCTINIVM LVCENSEM

C. R. S. ac in

Almo VRBIS Gymnasio Professorem.



MACERATÆ,

Ex Typographia Philippi Camaccij. M.DC.XLVIII.

Superiorum Permissu.

Apud [illegible] Jacobi Rossij

Illustrissimo, ac Excellentissimo Domino

ANDREÆ IVSTINIANO

PRINCIPI BASSANI,

Ac S. D. N. INNOCENTII PP. X. Nepoti

S.



EOMETRÆ quippe veteres P. E. vt pro felici, quo fuerant ingenio donati, facultatem hanc præclaris adornarent inuentis, immensis sanè laboribus, longè acutiores apposuere industrias; attamen non modicũ experti, quouis conatu, quædam educere minimè licuisse, sibi illico suaserant, citra reatum alienis à proprio potuerint commendari generibus; exindè quibus locum Geometria denegat, non pauca è Mechanicis inuecta fuere molimina, & valdè mirum fuerat, inter eorum Authores magnus ille accenseri Pergæus, quum è doctrina ab eo inclinationum proposita, vnico problemate cuncta inquisita potuerint accuratè perfici, ac exhiberi; Indicium planè perspicuum haud eorum perspectam habuerit omnium solutionem, quæ aliquando contemplanti mihi in animum induxerant eximij illi veteres, ex ritè parum collecto enthymemate, se & alios illusisse; immò & vlterius se insinuabat cogitatio, quod scilicet in ipsa re, dioptram oblique ad scopum collimauerint: ex legibus namque Dialecticorum habetur haud rectè consequi, nempè ex quo sedulò inquisita res inuenta non fuerit,

idcirco suo non comprehendi, ac ineße genere: nusquàm planè reperitur eius amplitudinis recessus, ac cuncta perlustrasse diuerticula, quæ adhuc animum adiecerant; vt agelli tàm destituti lubens culturam susceperim exercendam, quare post glebarum euersa reiectaue plurima, qui factum (sincerè ignorare me fateor) fortasse benignitate genij dixerim verius oblatum, quam inuentum quæsitum, cuius Compositio admodum simplex, quam Geometria ipsa suppeditat, in altum me adduxerat stuporem, quo scilicet modo per tot sæcula præstantissimos potuerit latère Cultores, lusus quippè dicerem Naturæ fuiße, quæ soleat suum quandoque sublimioribus subducere influxum, & alijs porrò ingenijs gestiat explicare sinum.

Opusculum igitur hoc, & quæpiam non minus inopinata affert, Tuoque P. E. Nomini nuncupandum mea erga Te deuotio, ac obseruantia postulabat, vt aliquo attestari documento, & paruum quippè si molem, at prole eius fœcundissima, adultum intuenti protinus apparebit, qualecumque illud sane fuerit, si ad animi, qua optime non ignoras oblatum. Inclinationem aspexeris, pro ea qua ditatus es benignitate, humanissimè à Te conspecti sum ratus.

Cæterum ad encomia stilum diuertere, præsens quippè inhibet Institutum, & quis quæso pro dignitate credat, vel compendio indicari quæ pro Amplissimis vndiquè Meritis singulares prosequutæ sunt historiæ? De Illustrissima familiæ Prosapia, de Heroibus, Dominio, Proauorumuè in rebus gerendis præstantia, de Purpuræ splendore pauca enunciari non decet, verum eiusmodi, vt extera quodammodo haberi queunt, quæ deindè personam comitantur, indiuidua

plane

planè illa sunt, & propria, Dotes, nimirum virtutes exercitio comparatæ, Studia, animi Moderatio in prosperis, Mentis Constantia in arduis, Temperantia, & in omnibus Magnificentia: hæc & alia quamplurima, quæ disertissimi postularent oratoris eloquium silentio preteream, mihi tamen fiat indultum proloqui, quod censeam verius, ab artis scilicet facundia, quæ protinus fluens, ac sæpius ex industria plurima adfectare didicit, minimè sunt exoptanda encomia, verum è proprio rerum gestarum tenore, qui se constantèr moderatur, sincerius colligendæ sunt laudes, eoque facilius imprimuntur, & ad æmulationem frequentiùs excitant: Ideò tam cumulatè, quæ in Te suspici optimè queunt, haud paucis in exemplum haberi merito decerent. V.

Illustriss. ac Excellentiss. D. T.

Deuotissimus
Antonius Sanctinius.

INGENVO LECTORI S.

NVlla quippè facultas, nulla ars fuit vnquàm inter acquisitas, quę in sua primęua origine totam recepisset pulchitudinem, quin nouis deindè accessionibus, specie fieret illustrior: neque in re admodum scita afferenda sunt exempla, verùm in mathesi præstantissimi industria authores, tam accuratè culturam exercuere, vt quam maximè liceat ambigi, an in illo antiquorum (quod dixerant) sapientissimo; vel à duobus proximè sęculis extiterit fæcundiorem, in hoc tamèn conueniunt vniuersi, vnum geometriæ agellum ab omnibus fuisse renuntiatum, & ad excolendum neglectum, vt pro eòdem conqueri nullatenus facultas quiesceret, quò etenim vberiores, ignotum minimè erat, expectari messes, eò amplius magis hærerent, & suos labores subducerent, quare siuè indignata, siuè impatiens effecta tandem, vt hoc dedecus aliquando à se properet commendari vtcumque sibi consultum voluit: Idcircò quæ hoc opusculo prodeunt industriorem expectant manum, nobis quidem satis fuerit primùm indigitasse, haud facultati impossibilia, immò parabilia admodum, quæ ad illius Culmen optimè pertinere enunciarunt omnes, errata postea, quæ nostra erunt humanitati indiuidua, benignè indulgenda confidimus, & quæ ex vitio typis consueto habentur, emendari licebit, nec omnia prosequuti sumus minutiora Vale.

Cum à noſtris Prædeceſſoribus facta fuerit R. P. D. Antonio Sanctinio noſtræ Congregationis Profeſſo facultas imprimendi quoddam eius de rebus Geometricis opuſculum, quatenus ad Nos spectat, eandem confirmamus. Datum Papiæ in Collegio noſtro Sancti Maioli IX. Kal. Aprilis. 1648.

D. Io: Baptiſta Spinola Vic. Gener. Congregationis Somaſchæ.

Si placet Illuſtriſs. & Reuerendiſs. D. D. Papirio de Silueſtris Episc. Maceratæ.

Imprimatur Fr. Vincentius de Gulijs Min. Conu. Sac. Theol. Magiſter, in Patria vniuerſitate Philoſophiæ Profeſſor.

Imprimatur.

Ludouicus Signorius Vicarius Generalis, & Auditor.

Ego Ioſephus Talianus Maceratenſis Collegiatæ S. Saluatoris eiusdem Ciuitatis Canonicus, & Mathematicarum ſcientiarum òlim in hac Patria vniuerſitate Profeſſor, iubente Reuerendiſſimo P. F. Io: Vincentio Paulino Sacræ Theologię Magiſtro, ac Anconæ, & annexorum Generali Inquiſitore Ordinis Prædicatorum, Opus inſcriptum Geometriæ Appendix, & Inclinationum Parergon, authore Admodum R. P. D. Antonio Sanctinio Congregationis Somaſchæ, atque in almo Vrbis Gymnaſio præſtantiſſimo Mathematices Interprete, attentè perlegi, & quia nihil inueni, quod aut Catholicæ Fidei obſit, aut mores lædat, immo noua, & ſcitu digniſſima reperi, ideo, vt in lucem prodeat, & Typis mandetur, perutilè cenſeo. In quorum fidem, &c. Datum Maceratæ Kal. Iulij. 1648.

Ioſephus Talianus, qui ſupra manu propria.

Imprimatur.

Fr. Io: Baptiſta Talianus Vicarius S. Officij Maceratæ Ord. Prædicatorum.



INCLINATIONVM GEOMETRIÆ APPENDIX.



Nclinationum doctrinam Apollonij Geometriæ cognomento magni, plurimis quippe sæculis apud doctissimũ Pappum cineribus vix respersis tumulatam, ipso collectionũ septimi Libri vestibulo, nostra tandem tempestate excitauit, ac præclarè Ghetaldus, duobusuè libellis distributam euulgauit, at pro vnico, & quidem generali problemate in operis aggressu statim obuio, non paucos, & sanè rationabiliter admirari percepimus, cur doctus auctor, & alioquin admodum accuratus, de eodem nec vllum indicasset verbum, ac silentio tàm alto illud dissimulare studuerit. Vt igitur quid super hoc à nobis sentiatur clarius concipiatur, oportunum satis erit eiusdem Apollonii in medium verba afferri, quę sunt sequentia, ex eodem Pappo desumpta.

„ *Duabus lineis positione datis, inter ipsas ponere rectam*
„ *magnitudine datam, quæ ad datum pertineat punctum*

Nec in dubium verti potest, in qualibet facultate, ac in mathesi præcipuè, magni semper fieri propositio-

nes, ac pręcepta generalia, ex eo vel maximè, quod plurima videantur ſtipari familia, dum ſingularia priuatim abſq; prole incedant; verum ne ſuper celebrium virorum fragmenta, quidpiam inædificari videamur voluiſſe nobis, tenemur dubio minimè ſuſpendere ſolutionem, & pro clariſſimo Ghetaldo de matheſi optimè merito, ac mihi dum ſupererat valde per litteras familiari reſponſum interpretari, idcircò á nemine euidenti quidem ratione infici poſſe ſupponimus, quò tribunal præſidendi authoritas ſibi non reperit, ad eam tamen ſpontè prouocantes, ſæpius non modica irrogari præiudicia. Verum vbi perpetuò primas rationi defe rantur, vt in matheſi omnes fateri debent, nihil iri delatum authoritati, nihilominus illam adhuc, & ab immemorabili intruſam Ghetaldus repererat, quod planè in hiſce etiam candidati haud ignorant, quare plurimis cum prædeceſſoribus per quam clariſſimis, obductum ſibi ferè iter ad progreſſum habuerat, vnde inanem cenſuerat fore laborem, vltra quod effeciſſent ſapientiſſimi, proprias in hiſce exercere vires, præter propterquod apud eundem Pappum ex ſententia maiorum facilè obſeruaſſet ad XXXV propoſitionem quarti collectionum, indictum ferè omnibus.

„ *Datum quidem angulum, vel circumferentiam tripartito*
„ *ſecare ſolidum eſt, ſed datum angulum, vel circumferen-*
„ *tiam in data ratione ſecare lineare eſt.*

Ad eiuſmodi effectionem inter cęteras generale problema illud dirigitur, vt in progeſſu oſtendetur, at decretum ſtilo tam dictatorio ab authore celeberrimo

conſi-

consignatum litteris, non custodire piaculum fuisse cẽsuere plurimi, à quorum placitis diuertere supponimus noluisse Ghetaldum, exindè ad eadem spectasse attributa genera cogitasse, at amplius pro eodem facere videtur, & quod nobis arrideat magis est, illud idem generale problema vidisset, ab ipsa inclinationum doctrina expunctum, à Maximo huius nostri seculi Geometrarum clarissimo Vieta, qui in postulatum in suo Geometriæ supplemento comutauerat; igitur Ghetaldo admodum licitum fuerat agenti de argumento eodem, illud illibatum pertransisse.

Verũ ne quas optamus felices viri laudari manes, vel quispiam alius in vitium, haud facile expiandum, verteret, dum scilicet vnum á censura abiisse liberum volumus, & præstantissimum circumuenisse alterum, vnde oppido tenemur eiusmodi á nobis excutere labes, mihi etenim semper in animũ fuerat, Ingenium Vietęum, maiore, quam credi posset, aut experiri liceat, passim fuisse adornatum lumine: Idcirco graui quodam sibimet noto consilio, problema illud reuocari voluerit ad vnicum principium, admodum simplex, vt scilicet interim à varia perplexaue operum mole, in effectionibus geometricis subducens, defectus supplerentur, & vt erat profũdę indaginis, quod facilè mihi suadeo, fortasse pręconceperat, quod tunc exhibuerat ex ordine mechanico, imposterum per legitimè concessa posse ad leges geometricas expurgando reuocari, vt sua demonstratione munitum secluso quocumq; scrupulo ab omnibus amplecti, namq; nec semel sumus experti, haud

valde liberalem ſe præbet naturę Genius, quod vni diuitias theſauri in totum promere aſſueſcat quin pro modico, quod auellere quiſpiam ſtudeat, laboris plurimum cogatur impendere, & ſæpius optata minimè aſſequi; in hanc igitur ſententiam inclinare me fecerant obſeruata Authoris non nulla verba, in aureo ſuo ad artem analyticem dictata libello, vbi inductum Poſtulatum, quaſi opus Geometricum enunciauerat, vel quia valde ſimplex erat, vel quod modicum diſtaſſet ab accurato, vel quod aliquando purificari ſuppoſuiſſet, eius namq; ſunt ſequentia verba.

„ 24 *Ad exegeticum in Geometricis ſelegit, ac recenſet ef-*
„ *fectiones magis canonicas, quibus æquationes laterum,*
„ *& quadratorum omninò explicantur.*
„ 25 *Ad cubos, & quadratoquadrata poſtulat, vt quaſi*
„ *Geometria ſuppleat Geometriæ defectus.*
„ *A quovis puncto ad duas quasvis lineas rectam ducere*
„ *interceptam, vt ab ijs præfinito poſſibili quocumque in-*
„ *ter ſegmento. Hoc autem conceſſo (eſt autem* ἄιτημα
„ δισμήχανον*) famoſiora hactenus, quæ* ἄλογα *dicta fue-*
„ *re problemata* ἐντέχνως *ſoluit meſographicum.*

In hiſce Authoris verba duo manifeſta habentur, alterum ſcilicet (quod noſtro magis inſeruit inſtituto) quod poſtulati verba eadem ſunt, quæ problematis Apolloniani: alterum verò quod pro quocumque aliorum molimine ſubrogatum dixiſſet opus quaſi Geometricum, nec planè me præterit, vt nouum, & inopinatum omnibus ferè inuiſum futurum, & modo à non nullis adeò improbari, vt ex numero impoſſibilium

censentes, me malè consultum selegisse argumentum, ad Geometriam verè legitimam reuocare, quod ab omnibus hactenus destitutum, ne dixerim desperatum haberetur, attamen cum veritati magis obsequi teneamur, quàm in authoritatem aliorum committere causam nihil moueret me ab instituto, vt tandem exantlatis laboribus omne arduum in facillimum adduximus opus, omnino intra limites geometricos, numquam etenim in reatum illud incidere statueram, quod legimus apud Pappum in calce libri collectionum quarti hisce verbis.

„ *Videtur quodammodo peccatum non paruum esse apud*
„ *Geometras, quum problema planum, per conica, vel*
„ *linearia ab aliquo inuenitur, & vt summatim dicam cum*
„ *ex improprio soluitur genere. Hæc ille.*

Et quidem si ostenderimus, sectionem anguli plani ad peculiare suum spectasse genus, & non tantum tripartitò, sed inqualibet analogia geometricè secari viderint alij, an vniuersos inciderint in illud grauè delictum, qui ad suum non genus remiserant authores, speramus deinceps ignotam hactenus veritatem in complexum haberi, & expurgari quam plurima. Sit igitur.

PROBLEMA PRIMVM.

Dvabus datis rectis lineis angulum quemcumque efficientibus, datoque extra puncto, & adhuc alia praj. nita linea; hanc inter illas positione datas aptare, vt ad datum pertineat punctum.

Illud

Illud ſcilicet, hoc eſt problema tam arduum, vt ab eo inquirendo uniuerſi arcerentur; fortaſſe cogitantes confuſum occultari intrà impoſſibilium chaos, ut ſpes, uel ſemita eruendi eluceſceret ulla, immò dubium admodum probabile eſt, an authori Pergæo effectio conſtitiſſet ipſa, nam inter artifices enumeratur, qui mechanica inuexerant in ſuffragium, Euthocio, & alijs atteſtantibus, quod autem in mentem uenerat, & inquirendi labores cum alijs minime repererimus, ardor planè perfectionis, tam pulchræ facultatis in cauſa fuerat, & quia ſufficiens nullum impedimentum ad aſſequendum ſe obtulerat, nec me fugit opus fuiſſe præcoces ſuſtinere cenſores, quos non moror dūmodo, nęuus huiuſmodi è geometria eluatur, nec perpetuò Mechanicorum indigeat, ut ſuas pulcherrimas, utcumque depromat effectiones, quæ omnia per nos ad ſuos remitti opifices uolumus, ſed ad rem.

Duæ lineę datæ poſſunt ad ſummũ inclinationem uariare trifariam, ob ſpecies angulorum, primum igitur rectæ ſe se committant ad rectum *AB*, *BC*, & punctum extra ſit *D*, lineaue inſerenda ex præſcripto G. Agatur ex *D* ęquidiſtās *DF* ipſi *BC*, in qua ponatur *AF* ęqualis externę *G*, & ſecetur bifariam puncto *E*, ubi facto centro, ac interuallo *ED*, ſit peripheria circuli, uel occulta ſi placet, & ſignabitur punctum *H*, à quo ad *HF* diſtantiam ponatur in *DL* æqualis, & portio *AL* referatur in *BC*. Dico puncto *C* abſolui quæſitum, nimirum ducta *DC* pars eius *NC* relicta iter innclinatas *AB*, *BC* æqualis fieri AF, ſiuè G. (cum autem ex

diſtan-

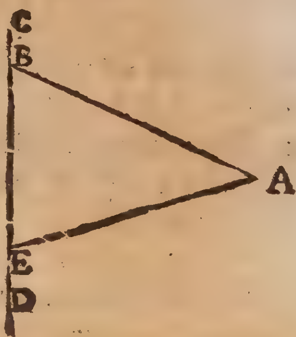
distantia *ED* non attingeretur *BC* ęquidistans *DA*, infra erit suum symptoma) ad demonstradum deinde duo media assumimus ; alterum quasi ab effectu, & erit primum, alterū porro à causa, vt à nemine effectio hęc pulcherrima infici possit. Ponatur ī directū *BC* linea *C*K æqualis *DA*, iunctaque *A*k, erit parallelogrā mum *AD Ck*, demissa *CL* ęquidistans *AB*, se secabit cum *A*k in puncto *I*, postea centro in *A*, & distantia *AF* peripheriam transire accuratè per I sumus ostensuri. Triangula namq; *ADN*, *CIK* similia, & ęqualia euadunt, ex ęqualitate angulorum, quia *AND* ęquatur *NAI*, hoc est *AIL* alterni, & ad vertices *CI*K, & in parallelogrāmo, qui ad *D*, K opponuntur ęquales fiunt, reliqui *DAN*, K*CI* (hìc sunt recti) at ad expletionē duorum rectorum fiunt pares, & *DA*, *CK* facta sunt ęqualia, ergo & reliqua latera, homologè sumpta ęqualia sunt, quare duo *DN*, IK si auferri intelligantur, reliqua *NC*, *AI* paria erunt: quum verò ostenderimus *A F* æqualem ipsi *A*I factum erit quod oportuit. A puncto igi-

ᾶo igitur *A* dato, ad lineam *CL* poſitione datam, ſi agatur linea, quæ angulum faciat datum, erit linea poſitione. Sit itaque angulus conſtruendus à linea exeunte à dato puncto *A*, æqualis angulo L*C* *D*, & linea erit *AI*, quę faciens angulũ *A*IL æqualẽ interno, erit æquidiſtãs *DC*, immo erit eadem linea *AIK*, quæ ſecabitur cum *A*K in I eodem, ſed aduerſarius dicat cadere AI alibi quam in puncto illo ſectionis I, ex proximo lemmate concludetur abſurdum, quo circa angulus LAI non poterit augeri vel minui á magnitudine LAI, limitata per AI poſitione in angulo dato AIL, ergo arcus neceſſario erit per idem I punctũ, & ſemidiametri fient AF, AI; verum AI erat æqualis NC, ergo AF æquabitur NC, & pertinens ad D punctum, factum erit quod oportuit.

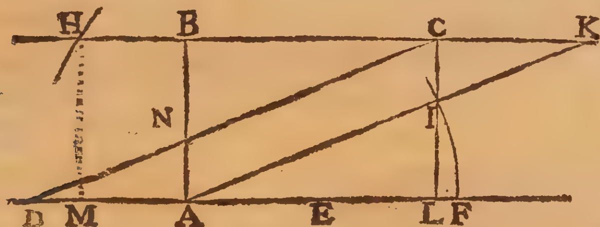
L E M M A.

EVclides ad xxx. Datorum ſic arguit, ſi AB linea poſitione non dicatur, ſeruans quantitatem anguli G dati

G dati: excidat, & si fieri potest alibi cadat, sit *AE*, ergo duo anguli *AED*, *ABE*, internus externo in triangulo *ABE* æquales erunt, cõtra 16 primi, quod esse nequit, & absurdum hoc vbicumque extra situm *AB* probabitur; est ergo *AB* positione, & constat intentum.



At huius problematis vtique meretur præstantia, vt alio & magis á causa comprobetur medio, facta idcircò vt supra cõstructione, donec acquiratur *C* punctum, demittatur *CL* super *AF* perpendicularis, secabitur *AF*



in *L* (minor est enim *BC* ipsa *AF*) Ideò per 7 libri 2 duo quadrata *AF*, *FL*, totius nempè, & alterius partis æquantur duplo, quod fit sub *AF*, in *FL* rectangulo, vna cum quadrato *AL* reliquę partis, si ab vtraque ęqua-

 lita-

litatis parte auferatur *FLQ* erunt æqualia

AFQ, & *ALQ* -- *FLQ* † *AFL* 2

reſoluto deinde *AF* quadrato per 4 ſecũdi, ęqualia erũt

ALQ † *FLQ* † *ALF* 2, & *ALQ* -- *FLQ* † *AFL* 2

rurſus ablata ſub eadem ſpecie æqualia, erunt

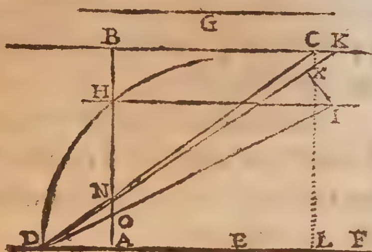
AFL 2 -- *FLQ* æqualia *ALF* 2 † *FLQ*

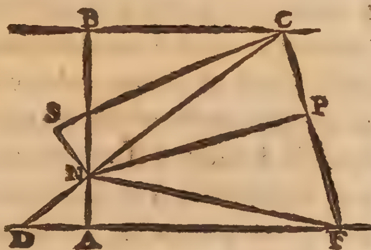
& vlterius reſoluẽdo per 3 ſecundi, erũt *AFL* 2 -- *FLQ*, *ALF* 2 † *FLQ* paria ſcilicet ſub ijſdem notis *ALF* 2 † *FLQ*, harum partium altera ad ſpeciem tranſeat quadrati, & ſit potens linea *LI*, vtrinque accedat prius ſublatum *ALQ*, ſi hoc componetur ad rectos angulos cum *LIQ*, vtique conflabitur *AI* quadratum, & ſimul *ALQ* † *LFQ* † *ALF* 2 erit *AFQ* prius reſolutum, ergo æqualia eſſe *AI*, *AF* quadrata, & latera, vel ſaltem hiſce initiatus negabit nemo, vndè manifeſtò ſequitur vndequaque roborata concluſio.

In ſchemate cadit *HM* linea, ne ocioſa relinquatur, ſi quis curioſè poſtularet, vnica circini expanſione dari *C* punctum, ex altero poſitione *D* dato, colligantur in vnum hæc ſimul ſpatia *EDQ* † *AEQ* † *MAF*, & hæc nihil aliud ſunt quam *ADQ* † *ALQ* (ſi duceretur *AC* linea) & *DAL* 2 rectangulũ, ſcilicet reſolutę partes in triangulo ambligonio *DAC* ex 12 ſecũdi, & habetur *HLQ* nempe DLQ, cui additum *HM* quadratũ, ſeu *CL*, omnia illa poterit *DC* linea, & dabitur eadem expanſione vnica *C* punctũ.

At quia ſymptomata complectitur problema, & ratio illud conſtruendi cuncta haud protulit, oportet illa per diſtinctos exhibere caſus, vt generalis proponatur

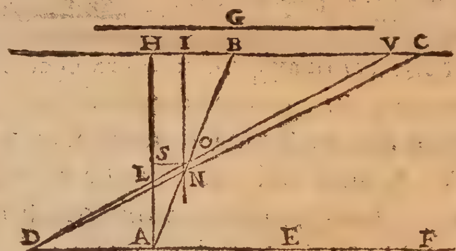
tur doctrina, & siquidem ex diuersa distantia parallelarum *DA*,*BC*, & magnitudine *G* externę contingere potest frequenter, quod à semidiametro *E D* non attingatur *BC*, vel quod vltra *AB* inter *BC* secetur; in horum vtroque casu constructio sic ordinanda erit. Ad idem interuallũ *ED*, vt cõtingit pars circuli scribatur *DH*, secabitur *AB* in *H*, per id punctũ agatur *HI* ipsis *DF*, *BC* ęquidistans, deinde inter *AH*,*HI* in angulo recto, ex *D* educatur *DOI*, ita vt intercepta *OI* æquetur datæ externę *G*: referatur postea HI in *BK*, et acta *DK* super eam ad angulos rectos cadat *IX*, & inter *DK*, *DX* media in ratione geometrica sit *DC*. Dico *C* puncto absolui quæsitum, scilicet intercepta *NC* ęqualis fieri datę externę *G*, seu *OI*, & ducta si placet *CL* vnã, vel alterã ex pręmissis methodum facilè repetendo ostendetur, & iteratò eadem premere vestigia ociosum, ac morosum censemus. Si verò alia compẽdiosiore vtamur idem concludetur, in proximo schemate ducta sit tantum *DC* seruatis distantijs in reliquo, agantur *NF*, *CF*, super hanc perpendicularis insistat *NP*, erunt duo quadrata





NP, *PC* ęqualia *NC Q*, ſicuti *NP*, *PF* æqualia *NF Q*, ſeu duobus *AF*, *AN* quadratis; exceſſus itaque duorum quadratorum *AF*, *AN* ſupra quadratis *NP*, *PC* ponatur ad rectos angulos ſuper *NC*, erunt *NC*, & *NS* (exceſſus ille) ęqualia quadratis *FA*, *AN*, nempè *NF* quadrato, ęquabitur quadrato *CL*, quare & *NS* ipſi *AN*, vndè *AF* ipſi *NC*.

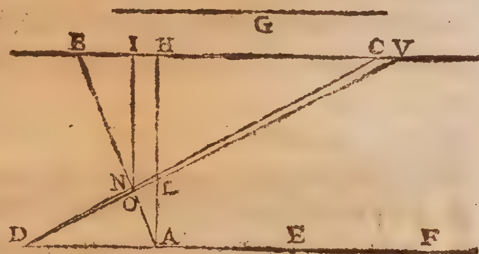
Secundus deinceps caſus erit quum lineæ *AB*, *BC* fuerint ad angulum recto maiorem inclinatę, reliqua ponantur, vt ſupra: vt conſtruatur problema, erigatur *AH* ad angulos pares, & inter *AH*, *HC* ex *D* puncto intercipiatur LV ęqualis externę, ſiue *AF*, ſecabitur inclinata *AB* puncto *O*, á quo ſi duceretur parallela ipſi *LH* (in ſchemate non adeſt) accipienda erit media proportionalis inter illam ex *O* ducenda, & *LH* ęquidiſtantibus, & hęc ex *N* puncto ſimiliter perpendicularis facta ſuper *HV*, erit *NI* deindè differentia quadratorum *HL*, *NI*, aucto quadrato *HV*, fiet quadratum ex *IC*. Dico punctum *C* eſſe quod quæritur, duo namque quadrata *HL*, *HV* æqualia fuerant quadrato *LV*, & exceſſus *HL* quadrati ſupra quadratum *NI* additus quadrato *HV*, vt conſtituatur *IC* quadratum, ergo duo quadrata *NI*, *IC* ſunt æqualia duobus *LH*, *HV*; quare & LV æquabitur qua-



drato

drato *NC*, & linea pertinet ad *D* punctum datum, quo circa constat intentum.

Tertius denique casus erit quum datę *AB*, *BC* lineę conficiunt angulum recto minorem, manentibus vt supra reliquis: vt problema construatur, agatur *AH* perpendicularis inter parallelas, & à puncto *D* inclinetur per primam formam sub angulo *AHV* recto, linea *DV* relinquēs sui partem LV interceptam, vt in alijs supra, secabitur inclinata *AB* in puncto *O*, à quo si caderet æquidistans ipsi HL, inter illam, & HL esset inuenienda media *NI* proportionalis pariter incidens ad angulos rectos, quantum itaque differunt quadratum *NI*, & quadratum ex linea ducenda ex *O*, tantum imminuatur de quadrato HV, vt residuum sit *IC* quadratum, ergo duo quadrata *NI*, *IC* hoc est quadratum *NC* æquabitur quadrato LV, idest duobus LH, HV, sed *CN* pertinet ad punctum *D* datum, ergo in omnibus casibus problema absolutū perspicuè apparet.



ADNOTATIO PRIMA.

ET si in primo casu contingeret, quo nempè *AB*, *BC* se se committunt ad rectum angulum, quod distantia parallelarum *AB*, *BC* adęquaret distantiā *DA*

puncti

puncti ſcilicet *D* à perpendiculari *AB*, vtique eo caſu eſſet inclinanda *DC* quaſi ab angulo quadrati in oppoſitum latus, & problema hoc habetur ex antiquis apud Pappum propoſitione 72 libri 7 collectionum Heraclito adſcriptum; ſi verò manente vt ſupra æqualitate diſtantiarum AB, BC continerent angulum vagum, tunc ex *D* ducenda foret quaſi ab angulo rhombi, & hoc quidem problema Ghetaldus conſtruxerat propoſitione *3* primi libelli de inclinationibus agens, verum quęſito generali generalis opponenda erat doctrina.

ADNOTATIO SECVNDA.

ITaque omni ex parte problema abſolutum, per propria ſui generis, planorum, implicat quidem, induſtria quacumque ab eo amoueri poſſe; diuerſum planè eſt, ſi altera analyſeos methodo, indicent peritiores, aliquatenus ſectionum conicarum concurſu præfiniri altera mediarum inter extremas; effectio igitur ea, et cuncta quæ aliorum conſtructa habentur molimina in ſuo conſiſtant ordine, nihil geometriæ puriori officit; torqueant ſe ſe vel minimum inhiberi queunt, ne dum naturalis effectionis efficacia eneruari, quin ſuas liberè exerat vires.

ADNOTATIO TERTIA.

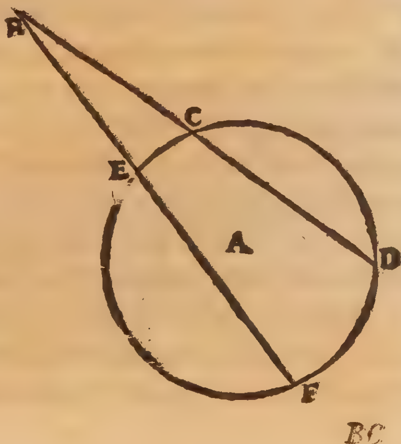
IN proximo ſecundo problemate, inter cętera ordinauimus methodo alia interponere pręfinitam inter

ter inclinatas ad angulum recto minorem, in quo præclarè laborasset Vieta, nisi opus inniteretur suo pricipio, nos verò exhibituri geometricè constructionem, ne aliundè inquirenda sint, quæ huc pertinent, pauca hęc ab eiusdem authoris supplemento desumpsimus geometrico, lubet hic afferre.

PROPOSITIO TERTIA EX SVPPLEMENTO.

Si duæ rectæ lineę à puncto extra circulum eductæ ipsum secent, pars autem exterior primę sit proportionalis inter partem exteriorem secundę, & partem interiorem eiusdem, erit quoque pars exterior secundę proportionalis inter partē exteriorem primæ, & partem interiorem eiusdem.

SVb A centro descriptum circulum eductæ ipsū secent à pūcto eodē B duę lineę, vna quidē in pūctis *E*, *F*, altera vero in *C*, *D*, vnde partes exteriores secantiū sint *BC*, *BE*, interiores autem *DC*, FE, sitq; *BE* inter *BC*, *DC* media proportionalis. Dico et



BC

BC mediam fore proportionalem inter *FE*,*BE*,quoniam enim ab eodem puncto extra *B* circulum ſecant duę *BCD*, *BEF*, Ideo eſt vt *BE* ad *BC*, ita *BD* ad *BF* , ex hypotheſi autem eſt *CD* ad *BE*,vt *BE* ad *BC*,quare *CD* eſt ad *BE*, ſicut *BD* ad *BF*, & per ſubductionem eſt *CD* ad *BE*,vt *BC* ad *EF*, & conſequentèr vt *CD* ad *BE*, ita *BE* ad *BC* , itaque *BC* proportionalis eſt media inter *BE*,& *BF* , quod erat oſtendendum.

EIVSDEM AVTHORIS PROPOSITIO QVARTA *SVPPLEMENTI.*

Si duæ rectæ lineæ à puncto extra circulum ductę ipſum ſecent,quod autem fit ſub partibus exterioribus eductarum æquale ſit ei,quod fit ſub interioribus;exteriores partes permutatim ſumptę continuè ſunt proportionales inter partes interiores.

SVb A centro circulum deſcriptum ſecent duę lineę rectę ab eodem B puncto eductæ, vna quidem in punctis C, D, altera verò in punctis E,F, vndè partes exteriores ſecantium ſint BC, BE; interiores CD, EF, et quod fit ſub BC, BE exterioribus, ſit ei æquale rectangulo, quod fit ſub DC, EF interioribus. Dico inter DC, et FE eſſe proportionales continue BC, BE, eas aſſumendo permutatim,vt videlicet partem interiorem primæ ſecantis ſequatur exterior pars ſecantis ſecundæ, vel interiorem ſecundæ pars exterior primæ, nempè eſſe, vt DC ad BE, ita BE ad BC, & ita BC ad EF

quo-

quoniam enim id quod fit ſub *CD*, *EF* æquale eſt ei, quod fit ſub *BC*, BE; Ideò eſt vt CD ad BE, ita *BC* ad EF, & per syneresim, vt CD ad BE, ita BD ad BF; ſed ex ratione cōſtructionis eſt BE ad BC, ſicut BD ad BF, ergo eſt vt CD ad BE, ita BE ad BD, & conſequentur BC ad EF quod erat demonſtrandum.

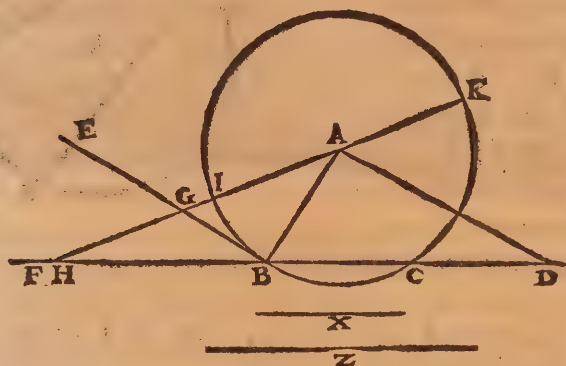
PROPOSITIO QVINTA

EIVSDEM SVPPLEMENTI.

Datis duabus lineis rectis, inuenire inter eaſdem duas proportionales medias continuè

Sint datę Z maior, X minor; centro A, ſpatio autem per ſemiſſem Z circulus ſcribatur, in quo linea aptetur BC æqualis minori X, & protrahatur in D, facta nempè BD dupla ipſius BC: Iungatur DA, cui æquidiſtans fiat ex puncto *B* indefinitè linea *BE*, deindè à puncto *A* inclinetur linea *AH* ea ratione, vt pars eius

comprehensa datis *BF*, *BE* æqualis fiat expositę *AB*, quę protracta ex vtraque parte secabitur circulus punctis *I*, K: producatur etiam *DB* indefinitè in *F*, & ab *A* puncto ducatur ad duas *BE*, *BF* recta *KAIGH*, secans ipsas *BE*,*BF* in punctis *G*,*H*, itaut *GH* linea sit æqualis ipsi *AB*, circulum verò in punctis *I*, *K*, quorum proxi-



mius ipsi *H* sit *I*. Dico continuè proportionales esse *IK*, *BH*, *HI*, *BC*. Quoniam enim constructæ sunt parallelæ *DA*,*BG*, ideò est vt *HG* ad *HB*, ita *GA* ad *BD*; est autem *HG* ad *I*K, sicut *BC*, ad *BD*, simplum videlicet ad duplũ, quare est vt *IK* ad *HB*, ita *GA* ad *BC*. Ipsi autem *GA* addatur *GH*, auferatur autẽ *AI*. Quoniam igitur *GH*, *AI*, sunt æquales, erunt quoque *HI*, *GA* ęquales; ergo est vt *I*K ad *HB*, ita *HI* ad *BC*. Ab *H* igitur pũcto extra circulũ sumpto eductę sunt duę rectę ipsum secantes, & quod fit sub exterioribus earundem partibus, videlicet HB, HI

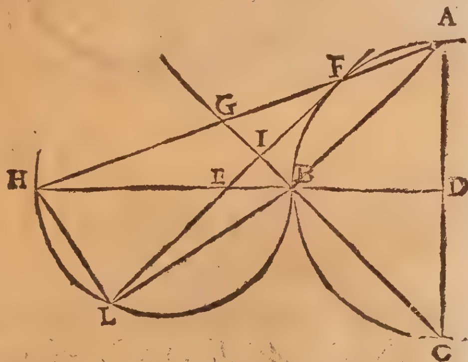
ęquale

ęquale eſt ei quod fit ſub interioribus, videlicet *IK*, *BC*. Quare partes exteriores ſunt permutatim ſumptę continuè proportionales, nempè *IK*, *BH*, *HI*, *BC*. Datis igitur duabus lineis rectis Z, *X* id eſt IK, *BC* inuétę ſunt medię continuè proportionales *HB*, *HI*, quod erat faciendum.

PROBLEMA SECVNDVM.

Inter duas lineas ad angulum recto minorem inclinatas prę-finitam ponere, quę ad datum pertineat punctum.

Sint BG, BH rectę ad angulum HBG inclinatę recto minorem, linea pręfinita AB, cui ęqualis inter illas oporteat inſerere, vt ad A punctum pertineat datum: producantur BG, BH indefinitè, & ſuper hanc cadat AC perpendicularis, fiet ABC triangulum iſoſcele, cui circũ eat portio circuli, & in primo caſu pro angulo recto erit ſemicirculus, in ſecundo eo maior in angulo acuto, & in tertio



pro obtuſo minor; quare *B* punctum in medio portionum, & triágula *ABC* Iſoſcelia. Deindè ponatur *DE* ipſi *AB* æqualis, & ex puncto *E* ordinetur tangens *FE*, in

qua porrecta signetur IL (à puncto videlicet quo secatur *GB*) ęqualis *AB*, huc vsque pro omnibus est vna constructio; porrò in primo casu iunctæ *BL* ponatur ad rectos angulos *LH*, secabitur reliqua *BH* in puncto *H*, ad quod si iungatur *AH* eius intercepta *GH* pars dico æqualis fieri ipsi *AB*.

In angulo deindè acuto *ABC*, vt in secunda figura agatur *AL*, tunc secabitur *HB* in *O*, & super *L* puncto

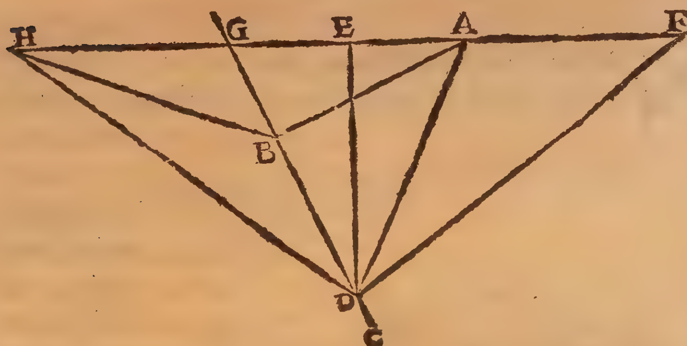
eleuetur perpendicularis *LH* erit idē punctum *H* efficiens quæsitum, vt *GH* pariter æquetur *AB*, seu *BC*.

Deniq; in angulo obtuso in tertia figura, agatur ex K diameter parallela

AC

AC, & iungatur kL, secabitur *HB* in *O*, & super *L* puncto erecta *LH*, erit *AH* illa eadem efficiens quesitum, & harum effectionum vna simul erit demonstratio.

Repetatur schema primum cum lineis oportunis, & in *B* puncto quadrantis est *AB* inter *HB*, *GB* interponenda; construatur ad *A* angulus *DAG* æqualis *DGA*, latera in isoscele *DA*, *DG* æqualia euadunt, & si demittatur perpendicularis *DE* diuiditur basis in *E* bifariam, seu si angulus verticis bisecetur *ADG* perpendicularis fiet *DE*, quod ad 26 primi ostendit in commentatijs Clauius, si verò in producta *HA* ponatur *AF* æqualis



AB, & iungantur ad *D* lineæ *DH*, *DF*, & tota *FH* secetur bifariam, ostendetur esse in *E* puncto; quare in triangulis *DEF*, *DEH* duo latera *DE*, *EF* æqualia euadunt ipsis *DE*, *EH* cum angulo recto ad *H*, à quibus si auferantur æquales anguli *ADE*, *GDE* erunt reliqui

ADF

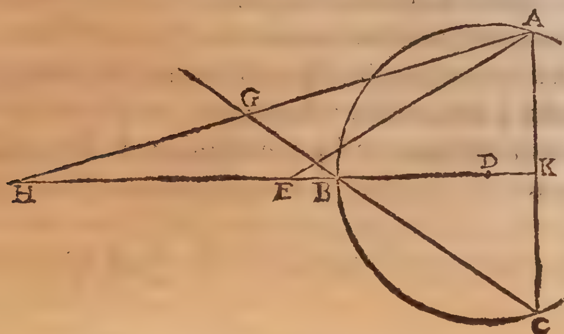
ADF, *GDH* anguli æquales, ſed erant æquales *DAF*, *DGH*, vt potè reſidui vterque ad duos rectos, ſublatis iam æqualibus in Iſoſcele DAG illis deinceps, ergo æquiangula ſunt triangula DAF, DGH, & ex 32 primi anguli DFA, DHG æquales, vndè & DF, DH latera eſſe paria oportet, ſed præter angulos latus vnius trianguli ADF, nempè AD æquatur DG lateri alterius trianguli GDH, quare & ſimilia, & æqualia erunt illa triangula, ideò homologa AF, HG latera erunt æqualia, ſed fuerat AF poſita ipſi AB æqualis, ergo & GH eidem æquabitur, quod erat imperatum fieri.

ADNOTATIO.

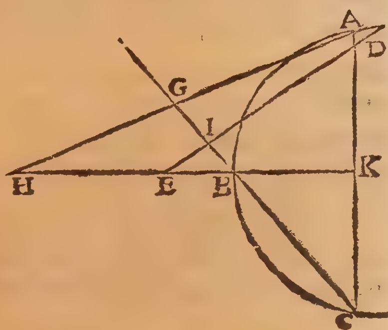
NEque hìc fæcunditas geometriæ cohibetur, quin ad alias extendi queat methodos, in proximo enim schemate vbi angulus ABC eſſet rectus, ſi DH fiat æqualis duobus BC, erit ducta AH reliquẽs interceptam *GH* ęqualẽ *BC*.

In

In ſecunda verò figura, quò eſſet angulus *ABC* acutus,



poſita K*E* æqualis *BC*, & *EH* ęqualis *AE*, erit vt ſupra *HG*, ęqualis *BC*. Demũ in tertia figura, in qua eſſet *ABC* obtuſus angulus, ponatur K*E* æqualis *BC*, & ducta *DE* ſecabitur *CG* in *I*; ponatur *CI* in *BH*, habebitur iterum *H* efficiens *HG* æqualẽ *BC*, ſeu A*B*, quæ duci non oportuit in triangulis *ABC* æquicruribus, & hæc cadere ſub demonſtratione præmiſſa liquet omnimodè, & ſi aliter ordina-



nari

ri liceret, quod fortaſſe alibi dicetur, etenim pro ſecunda hac propoſitione ſuperaddi non nulla coacti fuimus. Interim quum pluſquam bis edocti methodum interponendi præfinitam inter inclinatas, lubeat vnum rectificare ex veteribus opus, & ſit pro Conchoide Nicomedis à iunioribus vſurpatum frequentius, vt tandem cum omnium reliquis explodantur ſi probauerint oportunè ſibi facultas prouideri cuncta. Sit itaque.

PROBLEMA TERTIVM.

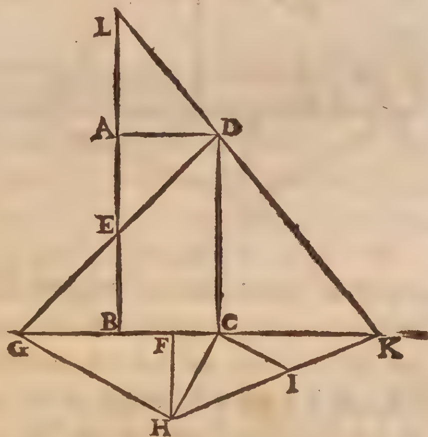
Datis duabus rectis lineis, totidem medias inter eas collocare lineas in analogia continua.

Sint igitur extremę datæ lineę *AB*, *BC* ad inueniendum medias expoſitæ in analogia continua. Inclinentur ad angulum rectum, & compleatur parallelogrammum *ABCD*, cuius duo latera *AB*, *BC* biſecentur punctis *EF*, & agatur *DE*, quę productę *BC* occurret in *G* puncto, deinde perpendicularis ex *F* excitetur indefinitè, & adplicetur *CH* ęqualis *AE* ſemiſſi nimirum *AB*, porrò iungatur *GH*, cui fiat *CI* ęquidiſtans ſimiliter indefinitè (vſque adhuc antiquorum conſtructio optime intra fines geometricos ſe continuerat, at deinceps quum inter inclinatas K*C*, *IC* ad angulum recto minorem ex puncto extra dato *F* nequirenr lineam pręfinitam interponere, & ad opus ſe ſe conuerterant alienum) at ex deductis ſuperius iam

con-

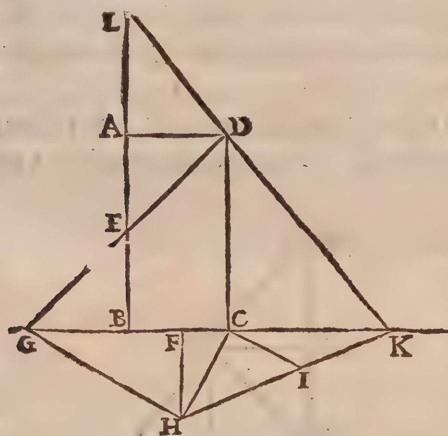
constat id legitimè posse fieri ex Euclidea doctrina, igitur ex altera ex premissis methodo à puncto *H* ponatur *I*K ęqualis *AE*, siue *HC*. Dico inter *AB*, *BC* extremas inuētas esse totidem medias in analogia cōtinua, & erunt *C*K maiori proxima, & *LA* reliqua, hiscè planè restitutis ipso demonstrationis processu nihil immutabitur, attamen ad rei complementum subnectere operæ prętium erit.

Quoniam *BC* secta est ęqualiter in *F*, & eidem in directum adiecta est *C*K, rectangulum *B*K*C* vna cū quadrato *FC*, æquale est quadrato *FK*, communi si apponatur *FH*, erit *B*K*C* rectangulum vna cum duobus quadratis *FC*, *FH*, hoc est quadrato vnico *HC*, æquale quadrato *HK*, siue duobus quadratis *FH*, *FK*: at quoniam vt *LA* ad *AB*, ita est *LD* ad *D*K, siue *BC* ad *Ck*, & est *AE* ipsius *AB* semissis, & *GC* est dupla *BC* (etenim ex similitudine triangulorum *DAE*, *GEB*, & laterum *BC*, & *AD*, seu *AE*, & *EB* æqualitatem habemus), ergo vt *LA* ad *AE*, ita *GC* ad *C*K, sed vt *GC*, ad *Ck* ita *HI* ad



D Ik, ob

IK, ob æquidiſtantes *GH*, *CI*; ergo componendo erit, ita *LE* ad *AE* vt HK ad *IK* : æqualis autem *AE* ipſi IK poſita fuit, quia æqualis erat *HC*, igitur conſequenter *LE* æqualis fiet *H*K, eorumque quadrata æqualia; ſed quadrato *LE* æquale rectangulum eſt *BLA*, vna cum qnadrato *AE*, & quadrato *Hk* eſt æquale oſtenſum rectangulum *BKC*, vna cũ quadrato *HC*, quod fuerat ęquale quadrato *AE* : igitur duo hæc quadrata *AE*, *HC* æqualia ſublata, erunt reliqua duo rectangula *BLA*, *BKC* æqualia, & latera eorum proportionalia reciprocè, hoc eſt, ita *BL* ad *BK*, vt *CK* ad L*A*: vt autem *BL* ad *BK*, ita *DC* ad *C*K, & L*A* ad *AD*; ergo vt *DC* ad *CK*, ita CK ad LA, & LA ad AD, ſiue *AB* ad CK, ita CK ad LA, & LA ad AD, ſiue BC. Sunt igitur in analogia continua AB, CK, LA, BC, quod erat oſtendendum.



ADNO-

ADNOTATIO.

EX defectu itaque inuentionis duarum inter extremas totidem mediarũ accuratè, cõquerebatur solertissimus olim Andersonus in Zetetico ad Ghetaldum responso, vt obinuenti potioris inopiam, cogerentur authores ad mechanicum prouocare, idcirco oportunitas hìc sese offert eadem Geometriæ restituendi, vt porrò nulla pro eiusmodi audiatur querela, sic igitur aiebat author.

Illas verò æquetiones in quibus magnitudo omninò data æquatur homogeneæ prorsus ignotæ, siue puras, siue adfectas, vt & prius, ita & nunc (nisi concessis quibusdam, quæ Geometria hactenus negauit) ad mechanicem geometriam ἐπιστημονικῶς reducere, ingenue nescire me profiteor, quę autem postulentur, vt in eiusmodi æquationibus quæsitum sciatur, ex analytica hac nostra methodo sic clarum fiet.

Ponatur A cubus æqualis solido facto ex BQ in D. si inter B & D duæ inueniantur proportionales cõtinuè, secunda *B* esse ipsam *A*, de qua quæritur, nemo est, modo hanc artem, vel à limine salutarit, qui nesciat.

Sit autem *A* cubus + *B* in *AQ* = æqualis solido dato, quod si cubus non est, ad eam reuocetur speciem, sitque *D* cubus, statim apparet huius æquationis mechanicem pendere ab hoc problemate.

„ *Ex serie quatuor proportionalium continuè data secun-*
„ *da, & recta æquali differentiæ inter primam minorem,*

,, *& quartam inuenire proportionales.*

Eritque harũ prima ipsa *A* de qua quęritur, *D* secũda illi proxima, & *B* differentia inter primam, et quartã;

At *A* cubus -- *B* in *A* quadratum ⩵ æquetur *D* cubo, proponatur

,, *Ex serie quatuor continuè proportionalium, data secun-*
,, *da, & differentia inter primam minorem, & quartam,*
,, *inuenire proportionales.*

Eritque *A* prima maior, *B* differentia inter quartam minorem, & primam maiorem, & *D* secunda.

Tertio *B* in *AQ* -- *A* cubo ⩵ æquetur *D* cubo, proponetur.

,, *Ex serie quatuor conitnuè proportionalium data secunda*
,, *& adgregato primæ, & quartæ inuenire proportionales.*

Eritque harum prima *A* maior, minorue secunda *D*, adgregatum primæ, & quartæ *B*, quæ ipsorum solidorum structuram consideranti clara sunt.

Quarto, *A* cubus ✱ *BQ* in *A*, æquetur *D* cubo. Ex hac æquatione statim quidem offeruntur è quatuor continuè proportionalibus, secunda *D*, tum *B* media proportionalis inter primam, & differentiam primæ, & quartę, siue rectangulum ex prima in differentiam primæ, & quartæ, at ex facto parabolismo, coefficienti dato, nimirum ipsi *B* quadrato reliquis adplicatis solidis, id est si fiat.

Vt *BQ* ad *DQ*, ita *D* ad *C*, erit *C* æqualis ipsi *A*, & prætérea altitudini ortæ ex adplicatiane ipsius *A* cubi ad *B* quadratum, si igitur data *C* ita diuidetur, vt cubus vnius segmenti æqualis fiat solido, quod fit sub

altero,

altero, & dato *B* quadrato, erit latus cubi magnitudo quęsita, hoc autem est.

„ *Ex serie quatuor proportionalium data prima, & adgre-*
„ *gato secundæ, & quartæ, inuenire proportionales.*

Eritque harum *B* prima, *C* adgregatum secundę, & quartæ, *A* vero secunda.

Quinto si *A* cubus -- *BQ* in *A* = ęqualis *D* cubo, & hic offertur secunda data *D*, cum *B* media proportionali inter primam, & differentiam primę, & quartę.

At verò si *D* cubus ipsi *B* quadrato adplicetur; hoc est si fiat, vt *BQ* ad *DQ*, ita *D* ad *C*, & eidem adplicari intelligatur, & *A* cubus, erit *C* ęqualis parabolę ortę ex adplicatione ipsius *A* cubi ad *B* quadratum, minus ipsa *A* longitudine, quare

„ *Ex serie quatuor proportionalium data prima minore, &*
„ *differentia secndæ & quartæ, inuenire proportionales.*

Eritque data B prima minor, C differentia secundæ & quartæ maioris, & A secunda quęsita.

Denique BQ in A, minus A cubo, ęquetur D cubo. hìc etiam statim offeruntur secunda D, tum B media proportionalis inter primam A, & adgregatum primę, & quartę. Adplicetur autem *D* cubus ipsi *B* quadrato, quodque inde oritur sit *C*, & eidem intelligatur adplicari, & *A* cubus, erit altitudo *C* ęqualis ipsi A, minus altitudine, quę oritur si adplicetur, & A cubus eidem *B* quadrato, vnde quęritur,

„ *Ex serie quatuor continnè proportionalium, data prima*
„ *maiore, & differentia inter secundam, & quartam,*
„ *inuenire proportionales.*

Erit-

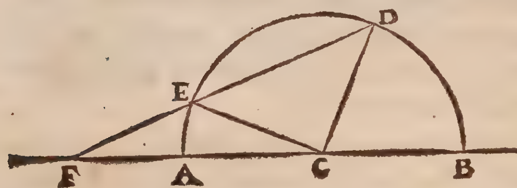
Eritque data B prima maior, C differentia secundæ maioris, & quartæ, & A, secunda de qua quæritur.

Atq; hactenus peculiaris mihi methodus in ęquationibus cubicis puris, siue vt libet adfectis, in quibus cum exactio geometrica nondum sit exhibita, aut inuẽta, quid in veteres illos Platonem, Eratostenem, Nicomedẽ, Archimedẽ, Heronem, Pappum, aliosue in similibus ad hoc negociũ ἐπιχειρίμαος imitari interim liceat?

Hactenus Andersonus, cuius propositę effectiones ex ipso Geometrię penu erutę, modo liberum vnicuique fiet ex supra inductis restituere, & quidem vt fuerat ex selectis, qui & Vietèam hausere doctrinam, scitè admodum enunciauit tunc temporis, ad eadem exhibendum, inuentam minimè fuisse exactionem, non idcircò quod inposterum exhiberi non potuerit, vt audacter plane nimis scripserant alij.

L E M M A.

QVia ad trisectionem anguli properamus, insistẽtes interim in repurganda forma ad ipso Vieta assumpta locus postulat vt reportetur 9 ipsius supplementi propositio, quæ sic se habet. Si à dato inperipheria puncto



puncto agatur linea occurrens diametro eductę tali ratione, vt intercepta conuexo peripherię, & porrecta diametri, ęquetur ſemediametro circuli, tunc angulus in centro, siuè opposita peripheria ſecabitur trifariam. Sit in ſemicirculo punctum D datum, à quo acta DF occurrat diametro eductę inpuncto F, adeo vt FE ęqualis sit ſdmidiametro AC, tunc BD arcus fiet triplus oppositi arcus AE, siuè angulus in centro BCD triplus fiet anguli ACE, & hoc ex vi Iſoſcelium DCE. ECF ęqualium laterum manifeste conſtat, & vt demonstratio legitima est, ita constructio defectum ostẽdit, & quidem non facultati, ſed cultoribus referendum, & nos inferius ostenſuri ex principijs ipsius Geometrię integram constructionẽ, hinc habeatur vbi triſectus fuerit angulus adplicatam lineam EF ęqualem fieri ſemidiametro, & è contra, si adplicata ęquetur ſemidiametro, angulus incentro triſecari &c.

PROBLEMA QVARTVM.

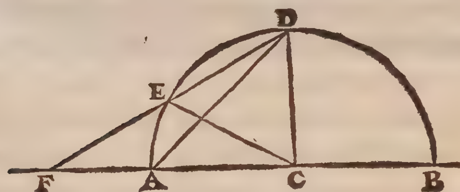
Data circuli peripheria, & in ea puncto, dataque linea præfinita, illam inter conuexum, & eductam cordam inclinare, vt ad punctum pertineat datum.

PLura quippè complectitur problema, quám effectione vna per frui queat, de ſemicirculo etenim, & alijs ſupra, et infra eo portionibus oportet intelligi, et pro qualitate lineę quæ pręſtet, cedat, ſiuę adęquet ſemidiametro, vel ſemicordæ, pariter adhuc pro

ſitu

ſitu puncti in ipſa peripheria dati, quare per diuerſa erit abſoluendum problema.

Sit primum data peripheria ſemiciculus ADB, pūctum verò in vertice quadrantis D, & linea pręfinita æqualis ſemidiametro; Demittatur DC, quæ in hoc caſu in centro erit, & normalis ſuper diametrum, iunctaque AD, hæc ſumatur vt media in ſerie trium proportionalium, quarum differentia extremarum ſit ſemidiameter AC, & reperiantur extremę, quarum maior ex D puncto ponatur in occurſum eductę diametri, & ſit DF, quę peripheriam ſecabit in E puncto. Dico eius intercepta



pars FE æqualis fieri ſemidiametro AC. Quoniam igitur in triãgulo AFD ambligonio, latus maius DF poteſt quadrata AF, AD, & inſuper quod fit ſub FA in AC bis, ſiue vnico quod continetur rectangulo ſub FA in AB: at idem quadratum DF reſoluitur etiam in duo rectangula DFE, EDF, Ideo harum partium facta comparatione erunt ADQ ✠ FAB ✠ FAQ ęqualia EDF, DFE: at rectangulum FAB vna cum quadrato AF, æquale eſt AFB rectangulo, id eſt æquale facto ſub EF-D, nam ex puncto F extra ductæ ſunt in circulo duæ F-D, & FB, igitur ſublata, quæ ęqualia ſunt euidenter, relinquetur DAQ ęquale EDF rectangulo, & ſi ad analogiam

logiam reuocetur ęqualitas, tres erunt proportionales *FD*, *DA*, *DE*, & harum differentia extremarum fiet *EF*, at in earumdem constructione assumpta fuerat *AC* pro differentia extremarum, quare ęquales esse *AC*, & *EF* fit euidens, & pertinet ad punctum *D* datum, quare factum erit quod oportuit.

ADNOTATIO PRIMA.

LEmma suppositum ex datis media, & extremarũ differentia ad exhibendum extremas in serie triũ proportionalium, quod á diuersis habetur, & admodum facilè sit, supersedemus repetere hìc, cęterum methodo eadem vsuri in alijs casibus, scilicet in portionibus supra, vel infra semicirculum, nihilominus pro semi circulo constructio singularis & expeditissima adest, scilicet si á puncto verticis *D* adplicetur diameter in occursum eductę, quę intercipietur erit semidiametro ęqualis, hoc est diameter secabitur à peripheria circuli bifariam, quoniam *DF* potest quatuor semidiametri quadrata *AC* seù *CD*, & hoc sublato, reliqua *FC* tria poterit eiusdem quadrata, at *FCQ*, ęquale est rectangulo *AFB*, vna cum quadrato *AC*, & subducto, poterit *AFB* rectangulum, eiusdem *AC* quadrata duo, hoc est rectangulum *EFD* duo poterit quadrata eiusdem *AC*, cum ęquetur *AFB*. Ideò secabitur in *E* bifariam, maximum enim spatium, quod à partibus sectę fit, est ex puncto semissium, quare constat propositum.

ADNOTATIO SECVNDA.

CVm autem adplicanda inter conuexum, et eductam diametrum diuerſa à ſemidiametro fuerit, tũc pro opportunitate lineę datę emendanda erit media, vt cum differentia extremarum, (quę ſẽper erit linea data) habeantur extremę: ponatur primum quod data ſit ſemidiametro maior, et ſit ipſa CG, iuncta AD, eidem inſiſtat ad angulos rectos HA, quę media ſit inter ſemiſſem ſemidiametri, et differentiam ſemiſſium datę CG, et ſemidiametri ſemiſſis, ſitque LO ęqualis AH, nempè quę media eſt inter CO ſemiſſem ſemidiametri, et huius differentiá á ſemiſſe datę *CI*, ſcilicet *OI*; ſi deinde iungatur *DH*, hęc temperata media erit, vt cum differentia extremarum *CG*, ipsę inueniantur extremę, quarum maior inclinata ex *D* ſecabitur á peripheria in *E* puncto, vt *EF* poſtea ęquetur *CG* datę, nam quadratum medię in ſerie trium proportionalium excedit quadratum minoris in eo rectangulo, quod fit à minore in differentiam extremarum, et quod illud quadratum poteſt, cũm quadrato differentię extremarum,

rum, eiuſue latus medium ſit inter maiorem & extremarum differentiam ſcilicet, *DHQ* excedit *DEQ* in eo quod poteſt rectãgulum *FED* ſub differentia extremarum, & minorem, illudque adpoſitum quadrato *FE* differentiæ extremarum, eſt rectangulum *DFE*, & ſunt iterum trium proportionalium *FD*, *FE* extremæ, quarum media ſit quod illud *DFE* poteſt rectangulum, quod eſt relictum è quadrato maioris *DF*; ſi auferatur rectangulum ſub eadem maiore *FD*, & minore, *DE*, ideſt quadrato mediæ aſſumptæ *DH*, & differentia *CG* in conſtructione aſſumpta ſit eadem cum *FE* vt conſtat

Si verò adplicanda *FE* detur, hoc eſt *CG* minor ipſa ſemidiametro, tunc quadratum eo modo inuentũ, vt *AH*, quod poſſit ſpatium ſub ſemiſſe datæ, & ſemidiametri differentia, in ſemiſſem ſemidiametri, auferendum erit è quadrato *AD*; vt quę reliquum poterit ſtatuatur media inter extremas inueniendas, quarum eſt differentia linea data: nequè pro hoc caſu ſchema nouum opus eſt adducere, cum ex eodem facilè concipi poſſit, & maior linearum trium proportionalium ex *D* adplicata in diametrum educta, relinquet *EF* ſemidiametro minorem, & factum erit quod imperatum fuit,

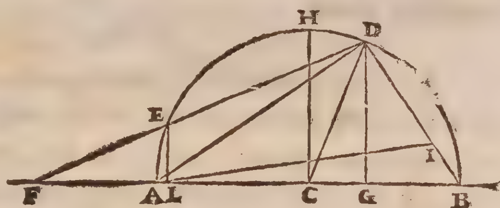
Notandum hic tandem ſola ea, quæ fuerit ſemidiametro æquali triſecari arcum, vel angulum: at in ampliorem geometriæ extenſionem ad alios transferimus caſus.

PROBLEMA QVINTVM.

Dato ſemicirculo, & puncto in eius peripheria vltra verticem, lineaque ſemidiametro æquali, illam inter conuexum, & eductam diametrum ponere, vt ad datum pertineat punctum.

SIT circulus, & in eius peripheria punctum datum *D* vltra verticem quadrantis *H*, à quo ſit inclinanda linea, adeò vt cõcluſa eius pars inter conuexũ peripheriæ, & diametrum eductã, æqualis ſit ſemidiametro expoſiti circuli. Demittantur in diametrum *AB* normales HC, DG, deindè ſecetur bifariam AG in M, per quod punctum agatur DML, & ex H per G alia HGK, & per idem punctum K aptetur in circulo KE ſumpta æqualis DL, ſeù ex L, diſtantia verò ſemidiamerri ſignetur punctum E, vtroque etenim modo haberi licebit. Dico illud E efficere quæſitum, ſcilicet ducta DEF, eius concluſa EF portio inter peripheriæ conuexum, &

um, & eductam diametrum æqualis fieri ipsi semidiametro, quod vt sine confusione linearum ostendi queat, in circulo altero prorsus æquali eadem signentur puncta D,H,E, lineaque DF, & perpendiculares HG, DG, iungantur postea AD. & DB; et super BD ponatur *AI* ea lege, vt DI sit potens FA in GC bis, supponimus ex opere iam AF terminari ipso F puncto, deinceps verò AI assumatur, vt media in serie trium proportionalium, & cum extremarum differentia, nẽpe ipsa semidiametro AC inueniantur extremæ, quæ quidem in progressu ostendemus coæquari ipsis DF, DE, vt methodo vtẽtes resolutiua. In ãbligonio triangulo ADF, latus DE maius potest duo FA, AD quadrata, plus eo quod bis fit rectangulo sub FAG, & idem DF quadratum resoluitur in duo rectangula EFD, EDF, & connexa CD quadratum similiter AD ęquatur duobus AC, CD quadratis, plus eo quod sub ACG bis comprehenditur rectangulo, quare æqualitas consistet inter



EFD)	&	*FAQ* ✠ *FAG* 2
✠ *EDF*)		✠ *ACQ* ✠ *ACG* 2
		✠ *DCQ*

Sed

Sed quadratum *FA*, plus rectangulo *FA* in *AB*, æquale eſt rectangulo *AFB*, ſeu *EFD*. Itaque ſi à rectágulo *FA* in *AG* 2 auferatur *FAB*, reliquum erit, quod fit ſub *FA* in *CG* 2, cui ſi accedat, factum ſub *CA* in *CG* 2, efficietur *FC* in *CG* 2, Ideò auferendo æqualia æqualibus, & reliqua collecta, ęqualitas iterum conſiſtet inter

EDF, & *ACQ* + *CDQ* + *FC* in *CG* 2

At *ADQ* æquale eſt quadratis duobus *AC*, & *DC*, plus eo quod fit ſub *AC* in *CG* 2: ergo *EDF* ſpatium rectangulum excedit *ADQ* in eo, quod fit ſub *FA* in *CG* 2, & eſt *EDF* æquale *AIQ*, cuius latus *AI* in conſtructione trium proportionalium, vt media aſſumpta fuerat, & pro differentia extremarum, *AC* ſemidiameter, quæ ęqualis ſit *EF*, cum eædem *DF*, *AI*, *FE* redeant in analogia, quare conſtat propoſitum.

ADNOTATIO PRIMA.

Aſſumpſimus in conſtructione *FA* terminatam, vtpotè habetur per adplicatam duplicem in circulo *KE*, aut *LE*, & ſi libeat diſſimulare, illud tamen alia via aſſequetur, & ipſam *FA* limitatam haberemus,

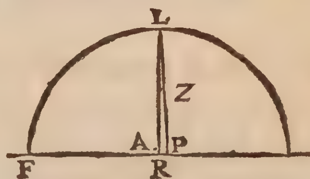
nam

nam ſi à quadrato AI, ſiue á ſpatio FDE auferetur quadrati AD ſpatium, relictum prorſus euaderet, quod ſub AF in CG bis continetur, quod quidem duplæ CG adplicatum, oriunda latitudo eſſet FA.

At ex analogiſmo Algebriſtarum idem eruetur, ſi enim demittatur EL perpendicularis ſuper diametrũ, & á quadrato AC auferri intelligatur cordę EA quadratum, ſpatium relictum æquale eſſet FAQ ✱ FAL 2, dicatur hoc aggregatum Z planum, & quod ſub AL2, quod notum eſt, ſit B, & quæſita FA dicatur A, ęquatio igitur ad analyſim ſtabit AQ † B in A = Z plano, quare ex analytico documento ſic explicabitur

$$LV\left(BQ\,\frac{1}{4}\;✱\;Z\ \text{pl.}\right)---B\,\frac{1}{2} = A$$

Nec ratiocinatio ſpecioſa à communi Algebriſtarum operatione diſtat, eiuſue demonſtratio ſic ſehabet. Sit igitur AP æqualis B, ſcilicet ĩ proximo adhibito epilogiſmo, ideſt duplæ AL, & diuiſa AP bifariam in R, erit AR æqualis ſemiſſi B, ſiue in ſuperiori figura AL, erigatur PL perpendicularis, & æqualis Z (ſeu in figura ſecunda problematis. DI quadrato) illud verò authores dicunt homogeneum comparationis, & iuncta RL fiat ſemidiameter, & ſemicirculus ſcribatur FL) erit æqualis FR, ex ipſa autem detracta AR cognita, habetur FA nota & quæſita

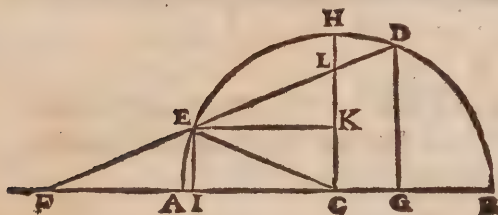


ſita æqualis ipſi A ignotę, quod erat intentum.

Atque hic ex data media Z, & differentia extremarum AP, aſſequuntur extremę, quarum maior ſit FP, & minor reliqua è diametro, quod incidenter ſub nectere libuit.

ADNOTATIO SECVNDA.

PRæmiſſi problematis licebit, & ab effectu veritas confirmari, nempè in ſemicirculo ADB poſita DF maior proportionalium trium inuenta vt ſupra, in qua fiat EL ęqualis FE, & demiſſis perpendicularibus HC, DG,



etiam EK, EI perpendiculares fiant ſuper HC, & AC, iungaturque CE, & in hoc ſymptomate vbide ſemicirculo agitur sẽper ęqualis erit AC, quod in alijs portionibus, vt infra non continget, erunt in triangulo CFL latera duo LF, LC analogicè ſecta per æquidiſtantem EK ipſi AB, quare æquales euadunt *LK*, *CK*: immò & duo triangula EKL, EKC ęqualia, vt facile poſſet concludi, vndè baſes EL, EC æquales, ſed erat EL æqualis EF, & EC ſemidiametro AC. Ergo conſtat propoſitum.

ADNO-

ADNOTATIO TERTIA.

QVum autem contigerit præfinitam inſerendam lineam dari diuerſam ab ipſa ſemidiametro, vti factum eſt ſupra in cõſimili caſu, neceſſe erit media attemperari pro qualitate datæ, vt ſi maior detur ſemidiametro, ſumenda venit linea, quæ poſſit rectangulum ſub ſemiſſe datæ in ſemiſſem ſemicordę, vt in ſchemate ſemiſſis G ſit CV, ſemicordæ ſemiſſis CN, & ducto circello CPV, iunctaque CP, vt media inter CV, & CN, illa apponenda erit ad angulos rectos ſuper AI iam ſupra inuentam vt media, tunc cum adplicanda erit æqualis ſemicordæ, ſit illa IO, & ducta AO media emendata erit inter extremas reperiendas, quarum differentia ſit ipſa G data, & inuentis extremis, maior illarum DF aptata ex D puncto in occurſum ſemicordę, exiet intercepta EF æqualis G, quod vt ſupra oſtendendum fuerit, & ſi quidem G data ſemidiametro cedat, facta eadem conſtructione linea CP erit iuxta ſuam potentiam

F tentiam

tentiam minuenda à quadrato *AI*. Ita latus reliqui emendata habebitur media ad pręstandum quęsitum.

PROBLEMA SEXTVM.

Datis ijsdem vt supra, punctum verò tantum consistat citra verticem quadrantis, illud idem præstare.

SIt semicirculus, in peripheria punctum *D*, linea verò semidiametro æqualis *AC*, secetur in *H* circulus, & descendant ad normã *HC*, *DG*, hæc producta ĩ *M*, iungatur *HM*, secta erit diameter in I: deindè portio *BI* secetur bifariam in *L*, & iuncta *DLK*, acquiritur punctũ K, ex quo in circulo *KE* æqualis *HM*, habebitur *E* punctum in peripheria, per quod si agatur ex *D* linea *DF*. Dico huius partem interceptam *EF* ab educta diametro, ac conuexo peripheriæ, ęqualem esse ipsi *AC*. Nam iuncta *DA*, eius quadratum superabit spatium quod fit sub *FDE*, per rectangulum sub *FA* in *CG* bis: resoluitur

enim

enim per primam, ac 12 secundi in vtrumque, scilicet

$$\left.\begin{array}{r} EFD \\ +EDF \end{array}\right) \text{ \& in } \begin{array}{l} FAQ \\ +FA \text{ in } AG2 \\ +ADQ \end{array}$$

At rectangulo *EFD* æquatur factum sub *AFB*, ideſt *FAQ* + *FA* in *AB*, at ſublata è quadrato *DF* plus æquo auferretur quam ſit *FA* in *CG2*, ergo per antitheſim *EDF* + *FA* in *CG2* æquabitur *ADQ*, ſiue *EDF* = *ADQ* — *FA* in *CG2*, & hoc ſpatium ſi ad formam quadrati tranſeat, fiet *AOQ* = *FA* in *CG2*, ſublatum ex quadrato *AD*, & reliqui quadrati latus, nempè *DO* media emendata erit ad inquirendum extremas *DF*, *FE*, vt earum differentia rurſus fiat *FE*, & ęqualis *AC*, ſumpta enim fuerat in conſtructione, ex æqualitate earundem extremarum, & conſtat propoſitum, vt inculcari magis non ſit neceſſe.

ADNOTATIO PRIMA.

ILlud idem punctum *E*, vt in ſuperiore alio caſu licebit aſſequi, vtpotè ſi diuidatur *BG* bifariam in puncto, & per idem ex *H* linea *HLK*, porrò agatur alia ex *D* in *C*, ibidem erit punctum *M*, & aptanda erit in circulo linea ęqualis *DCM* ex *K* puncto, vt habeatur rurſus in peripheria punctum *E*.

Cæterum habebitur *FA* portio determinata, & poſſet adhuc vlterius, vt factum eſt ſupra determinari, quod indicaſſe ſufficiat.

At ſi ex ſitu puncti, & ex data linea fieret, vt adpli-

cata excurreret tota extra peripheriam, hoc eſt tantum contingeret in *D*, tunc illa eſſet omnium quę dari poſſent minima ad efficiendum problema idoneæ, & ſi daretur alia poſſibilis diuerſa à ſemidiametro, tunc limitanda foret media *DO* inuenta, iuxta adnotata in cęteris præceptionibus, vt non oporteat idem opus repetere.

ADNOTATIO SECVNDA.

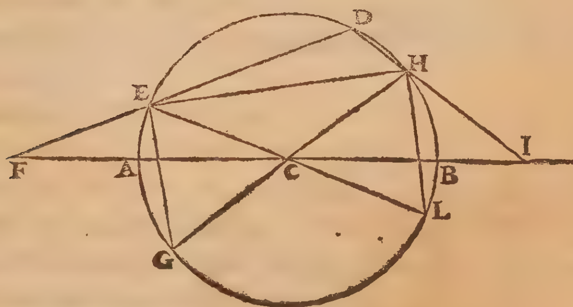
IDem oſtendere licebit in alia forma quaſi ab effectu, poſitò namque ſemicirculo *AHB*, & puncto in peripheria D, in eoque aptata linea DEF, quæ porrecta occurrat eductę CH in L, & demiſſis EK, & EI perpendicularibus ſuper oppoſitas, erunt CKE, LKE vt prius triangula ſimilia, & æqualia, & ideò LE, ſiuè FE æqualis AC, pertinetque ad punctum D; quare factum quod oportuit. Igitur conſtat quocumque caſu contingat dari punctum in peripheria, per methodum geometricam applicari ſemidiametro ęqualem lineam inter conuexum, & eductam diametrum, hoc eſt ſiue arcus, ſiue angulus congruus

gruus in centro legitimè triſecari, vt arcus AE fiat triens arcus DB, ſiue ACE triens anguli BCD, vt incompetens, & abſurdum fiat prouocare ad poſtulatum ipſa Geometria expulſum.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Dato in peripheria ſemicirculi puncto extra verticem quadrantis, oporteat duas inclinare ad diuerſa, diametro occurrentes eductæ, vt interceptæ ambo, abs conuexo æquentur diametro,

COmpleatur circulus in quo ſit poſitione punctum D, & acta, per aliquod præmiſſorum problema,



DEF, ex vna partium quod reliquum eſt per facilis quidem eſt, nam poſita *EG*, ſeu *HL* ſemidiametro ęquali, & per centrum conductæ *GCH* ſeù *LCE* punctum reliquum

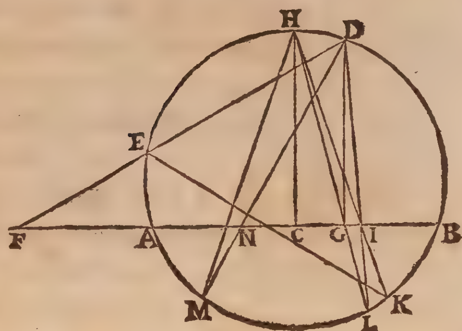
quum reperitur coalternum, Immo ex altero inuento per ſolam adplicationem lateris Iſopleuris trianguli, vt ex *E* in *H* punctum erit quod queritur, nam quadratum *GH*, ſeù L*E* poteſt, & *GE* ſemidiametri, & Iſopleuri lateris quadrata, vnde ſequitur tàm *AE* trientem eſſe arcus *DB*, quam *BH* arcus *AD*, quod etiam de angulis in centro oppoſitis ratio eſt eadem, quare conſenſus animaduerti licet totius operis, pro diuerſitate puncti ſemper L*E*, *HG* ſecari bifariam in centro, non autem in alijs portionibus, vt infra.

PROBLEMA OCTAVVM.

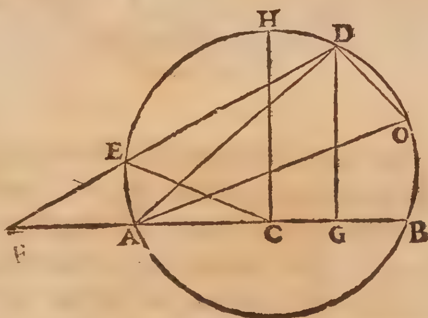
Data portione maiore ſemicirculo, & puncto in peripheria dato vltra quadrantis verticem, linea verò ſemicordæ æquali, vt inter conuexum, & eductam cordam ponatur, & pertineat ad punctum datum.

SIt *ADB* portio maior ſemicirculo, punctum *D*, ſecetur in *H* bifariam peripheria, & perpendiculares in diametrum ſint *HC*, *DG*, & portio diametri *AG* ſecetur bifariam in *N*, & duæ deducantur lineæ *D NM*, *HGL* ſecantes peripheriam in punctis *M*, L, deindè iungantur *HM*, *DL*, & hæc iterum ſecabit diametrum in *I*, per quod, acta *HI*K, habebitur aliud punctũ in peripheria nempè *K*, ex quo ad partes *A* aptetur in circulo K*E* æqualis aſſumpta ipſi *HM*. Dico quod puncto *E* abſoluetur problema, vtpotè ducta *DE* in occurſum

sũ cordæ protractæ *BA*, intercepta pars FE æquari semicordæ AC, quod vt absq; confusione linearũ ostendi queat, sit replicata portio ADB, in qua



ex inclinata DEF, habetur limitata FA portio eductæ cordę, & cum CG bis spatium, quo FDE rectangulum superat quadratum AD, cui si addatur illud potens, vt DO posita ad rectum angulum, & connexa AO, emendata fiet media proportionalis ad extremas inueniẽdum in serie trium, & differentia extremarũ sit semicorda, quibus inuẽtis, DF maior fiet, minor verò DE, vt per repetitionẽ earum resolutionum,



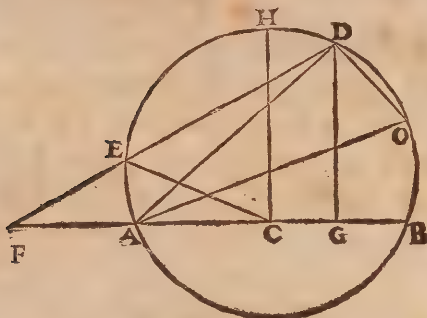
vt in consimili ostendetur, quoniam in ambligonio ADF triangulo, latus maius DF potest duo quadrata

AF,

AF, AD, plus eo quod fit ſub FA in AG bís, & pariter reſoluitur idem in duo rectangula EDF, EFD, quæ comparata, vt factum eſt ſupra, erunt

EDF)	æqualia	*FAQ*
✠*EFD*)		✠*FAG* 2
		✠*ADQ*

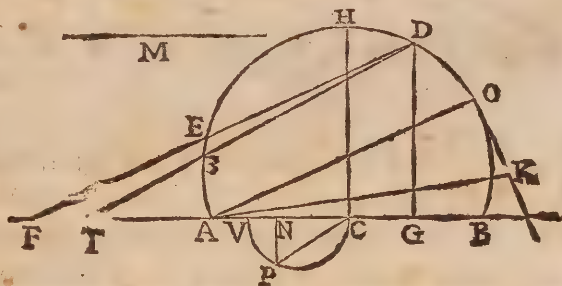
Verum duo FAG rectangula, vna cum qnadrato FA excedunt AFB rectangulum in eo, quod AG bis ſuperat cordã AB, hoc eſt per CG bis, ablatis ergo ęqualibus, ac reliquis collectis, fiet *EDF* rectangulum æquale ⊐*ADQ*† *FA* in *CG* 2, quare ad extremas inquirendum in ſerie trium proportionalium media fiet, quæ poſſit *FD* in *DE*, ſic differentia earundem erit *FE*, at eaſdemmet extremas acquiſimus ex media *AO* potens, nempè idem *FDE* rectangulum, & differentia *AC*; quare conſequitur neceſſario fieri æquales *AC*, & *FE*, & pertinet ad punctum *D*. Ideo factum quod oportuit.



ADNO-

ADNOTATIO.

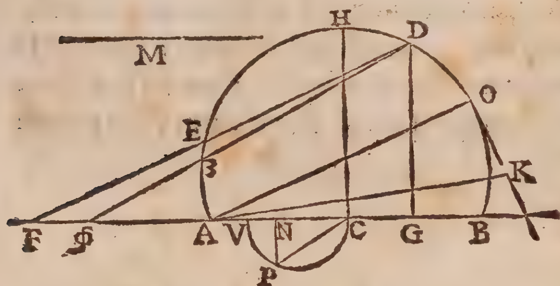
CVm in vertice portionis dabitur punctum H, media perpetuò erit ducta AH, & extremarum differentia semicorda AC, vt in semicirculo est demonstratum, ita adplicata inter conuexum & eductam cordam æqualis semicordæ euadet, quod ex supra deductis facilè posset confirmari; cum verò aliundè à vertice D punctum datur, tunc limitari oportet media pro qualibet datæ lineæ magnitudine singulatim. Sit portio semicirculo maior ADB, punctum D vltra verticem, longitudo lineæ M, & sit iam ducta DT;



quæ det T3 adplicatam æqualem semicordę, & potens TD3 sit AO, accipiatur semissis M in CV, semissis semicordę in CN, & quod rectangulum possit sub VC in CN sit CP, addatur ad AO in angulo recto, & sit OK ęqualis PC, duoque quadrata AO, & OK linea sit potest AK, quę erit emendata media, vt inueniantur extremę ex datis scilicet AK media, & differentia extremarum ipsa M, quę de more si reperiantur, & maior earundem DF ex puncto D ponatur inclinata ad

G occursum

occurſum eductę cordę relinquetur intercepta eius pars *FE* á conuexo, quæ ipſi *M* præfinitę erit æqualis, quod quidem per eadem tranſeundo veſtigia, poſſet ordinari demonſtratio, cumque abundè ſuperius repetitum ſit in hiſce vlterius immorari cenſemus forè inopportunum, & ſi quidem ſemicorda *AC* maior eſſet ipſa data, quadratum O K eadem via obtentũ ſubducendum foret è quadrato *AO*, & quod reſiduum poſſet, linea ſcilicet lateris eſſet ponenda media, ſed cum data pro differentia extremarum inuenientur extremę, & illarum maior, à puncto *D* inclinata caderet inter *A3*, quod etiam pro ijs, quæ ſequentur adnotatum eſſe volumus, abſque eo quod iterentur.



PROBLEMA NONVM.

Iiſdem quæ ſupra datis; ſitus attamen dati puncti citra conſiſtat verticem, illud idem efficere.

Sit portio *HDB* ſecta bifariam in *H*, & punctum *D* datum citra verticem portionis conſiſtat, linea verò

verò aptanda æqualis ſemicordę, demittantur normaliter *DG*, *HC* ſuper cordam, & pars comprehenſa *BG* diuidatur bifariam in *M*, & duę agantur lineæ *DM*K, *HGL*, deindè à puncto inuento K, ponatur in circulo K*E* æqualis ipſi *HL*. Dico quod puncto *E* efficietur problema, nēpè productis *DE*, *BA* committētes ſe in F puncto, fieri adplicata *EF* æqualis ſemicordę *AC*, ponatur eadem portio in coæquali, vt in ſchemate ſecundo, & ducta *AD*, ab eius quadrato erit ſubtrahendum quadratum ęquale ei rectangulo, quod fiet ſub *FA* in *GC* bis, & ſit *AI*, reliqua iuncta *DI* erit, quę ſumenda, vt media in ſerie trium proportionalium ad extremas inueniendas, cum illarum differentia *AC* ſemicordę, & erit maior illarum *DF*, de more ponenda ex *D* in occurſum eductæ cordæ, & harum demonſtratio ferè per repetitionem conſimilium oſtendi poſſet, quod non eſſe opus, ex dictis patet.

ADNOTATIO.

ET in hoc casu ex situ puncti D dati contingere posset, vt tota DF extra peripheriam caderet, hoc est tangentẽ esse, & ideò minima fieri omnium, quę inclinari possent per peripheriam HD, & siqui dẽ linea adplicanda fuerit á semicorda diuersa, iam plus quam semel tradidimus formam limitandi mediam, vt cum data tanquam differentia extremarum extremæ exhibeantur.

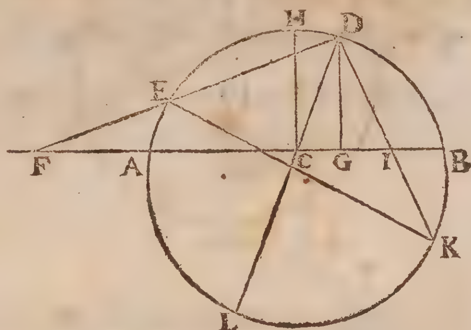
F A I G C B E D H

PROBLEMA DECIMVM.

Sit tandem data portio, quæ semicirculo cedat, & punctum datum, vltra verticem, adplicanda verò semicordam adæquet, oportet idem præstare.

Compleatur circulus, & in H secetur bifariam portio data AHB, in qua punctum D datum, demittantur

tantur HC, DG perpendiculares, deinde portio BG secetur in I bifariam, & agantur DCL, DIK, & ex K in circulo aptetur KE æqualis ipsi DL, & assequetur punctum in peripheria E, quo effici problema, si vlterius progredi libeat non discedés à pręmissis cõ similibus osté di posset, & nos vt superflua non repetimus.



PROBLEMA VNDEMVM.

Iisdemmet datis, tantum consistat punctum citra verticem portionis, & illud idem efficere.

COmpleatur circulus, & data *ADH* portio bisecetur in *H*, & vt supra *HC*, *DG* perpendiculares, á puncto nempè dato *D*, portio deindè *GB*, in *M* bifariam secta, & porrecta *HC* ad peripheriam in *K*, duæ agantur *DK*, *DML*, à quo *L* inuento puncto ponatur in circulo *LE*, quæ assumatur æqualis *DK*, & dabitur

bitur punctum *E*, per quod si agatur *DEF*, fiet adplicata *EF* æqualis semicordæ AC, quod ad instar aliorum casuum erit ratiocinandum.

ADNOTATIO.

ET in hoc casu eadem cautio recurrit, vt ex situ dati puncti, ac magnitudine lineæ posset totam extra peripheriam excurrere extra circulum, tangensque tantum fieri ad D punctum, verum si linea diuersa ab ipsa semicorda exponatur iam diximus ea qua limitanda media vt, idonea euaderet,

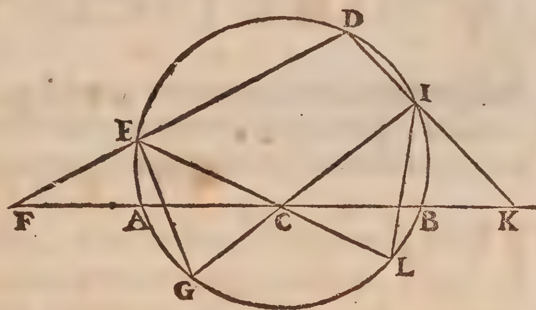
Cęterum in portionibus supra, vel infra semicirculum potest linea adplicari ad instar semicirculi, vt adplicatæ ęquales fiant cuilibet datæ supra, vel infra, aut ipsi semicordę, at sectio tripartita arcus siuè anguli numquam succedet, nisi in semicirculo, & cum intercepta fiet æqualis semidiametro, etenim propria est semicirculi, ac semidiametri passio, quæ ad portiones negat natura communicari cęteras.

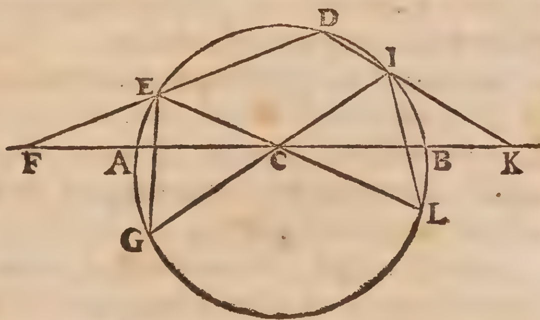
PRO-

PROBLEMA DVODECIMVM

In portionibus à ſemicirculo diuerſis, dato pūcto; & nō in vertice, licet ex vtraque parte inclinare duas occurrēte porrectæ cordæ, adeò vt, & æquales fiant, & cordā ſimul adæquent.

IN portione ſiuè maiore, ſiuè minore ſemicirculo ſignetur *D* punctum extra verticem, & ex congruo ſuo problemate ex ſupra inductis agatur ſiuè *DEF*, ſiuè *DIK*, vt intercepte *FE*, vel IK sīt equales ſemicordę, & per pūctum *C* cordę dimidiū ſignās, agatur *EC L*, vel *IC G*, habebitur & viciſſim, aut pūctum *I*, aut punctū *E*,





& erunt

& erunt aptatę *EF*, Ik ęquales ipsi *AC*, vt simul connexę sint ipsa corda *AB*, & in hoc agnoscitur elegans rei naturæ consensus, vt in semicirculo diximus in consimili iunctæ lineę *LCE*, *GCI* per centrum transire, hìc per semissem cordę, etenim triangula duo *CEG*, *CIL* fiunt ęqualia, & similia, & addito trapezio *CIDE* communi, ęqualia fiunt duo alia *IDEG*, *LIDE*, nec vlterius afferetur ostensio quum ex singulis prę missis pendeat.

PROBLEMA DECIMVMTERT.

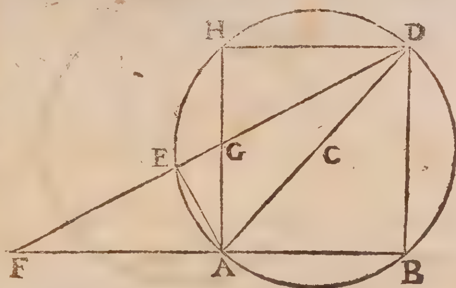
Data portione semicirculo maiore, & in peripheria puncto, ac præfinita, quam aptare oporteat, vt inter conuexum, & porrectam cordam, ad datum pertineat punctum.

IDem fatemur esse cum octauo, vel nono problematis, sed ideò proponitur rursus ad vsum, & vt propositio sexta supplementi Vietæ ad methodum reuocetur geometricam, Ibidem namque author sic sub alijs verbis proposuerat, nempè.

„ *Datis ex tribus propositis lineis proportionalibus, prima,*
„ *& ea, cuius quadratum æquale sit ei, quo differt quadra-*
„ *tum compositæ è secunda, & tertia, à quadrato compo-*
„ *sitæ è secunda, & tertia; inuenire secundam, & ter-*
„ *tiam proportionales.*

Constructio Vietęa fuerat, ex tribus in analogia, data prima *AB*, & recta *BD*, cuius quadratum æquale sit ei, quo differt quadratum compositę è secunda, & tertia,

tertia, à quadrato compoſitæ è ſecunda, & prima, vt diſcernantur proportionales, ſecunda & tertia. Componantur ad angulos rectos *AB*, & *BD*, & iungatur *AD*, quæ ſtatuatur diameter circuli è centro *C*, à puncto autem *D* in eductam cordam *BA* inclinetur linea *DF*, adeò vt intercepta circuli conuexo, nempe *EF* æqualis fiat præfinitæ, ſcilicet *AB* (huc vſque ſe haberet rectè conſtructio, niſi pro inclinanda linea *DF* ſuppetias author ex poſtulato requiſiuiſſet) at modo per ea, quę à nobis ſunt ſuperius allata per congruum problema, nam portio *AHDB* præſtat ſemicirculo, agatur *DF*, adeout intercepta *FE* portio ſit æqualis præfinitæ *AB*, abſoluta conſtructione in ipſa demonſtrationis ſerie imperfectio nulla eſt: reſumamus igitur authoris verba, iũgantur *AE*, & *AH* æquidiſtans euadat *BD*, & agatur *DH*,



erunt triangula *DGH*, *AEF* ſimilia, & æqualia, nam anguli ad *E* & *H* ſunt recti, & *AFE* ſuo coalterno *HDG* ſit æqualis, latera verò *DH*, ſeu *AB*, & *FE* æqualia ſunt ex conſtructione, eſt autem vt *BA* ad *AF*, ita *DG* ad *GF*, ſiue *FA* ad *FG*; ſunt ergo tres proportionales

BA, *AF* (ſeu *DG*) & *FG*; at *BF* compoſita eſt ex *BA*, & *AF*, prima nempè & ſecunda; *DF* verò compoſita ex *DG* & *FG* ſecunda, & tertia; quadratum denique ex *D F* differt à quadrato *BF* per quadratum *BD* datum, & factum erit quod oportuit.

PROBL. DECIMVMQVARTVM

Heptagonum regulare in circulo geometricè deſcribere.

HIc Vietęam methodum, quæ poſtulato hærebat inuiſo curamus expurgare, expoſituri nihilominus vniuerſalè infra pro quocumque polygono ordinato laterum imparium, & quidem cum ſupra angulum planum trifariam ſecuimus, iã facilè exſurgit heptagoni deſcriptio, quæ deinceps adhuc facilius perſoluere oſtendemus. Ad propoſitionem 19. ſupplementi ſic habet author in conſtructione heptagoni. Sit circulus cuius centrum *C*, diameter *AB*, eius triens ſit *BG*, iungatur *GH*, ſumpta ſcilicet triente ſemicirculi *BH*, cui æqui-

diſſet

distet ex centro, *CD*; ex puncto *D* agatur *DF*, itaut *EF* ęquetur ſemidiametro *AC*, quod fieri poſſe geometricè oſtendimus in quinto problemate, & huic ex *H* puncto æquidiſtans fiat *HI*, porrò ex I puncto ponatur in circulo linea IK æqualis ſemidiametro *AC*. Dico arcum *A*K ſeptimam partem eſſe totius circuli, nec vlterius hìc cenſemus demõſtrationem addere oportunũ, poterit namque quilibet ſtudioſus apud authorem inquirere, & quod aliàs ſubobſcura, à plurimis videbatur, longè facilior in nupera editione Batava (qua cuncta prius impreſſa vno comprehenſa habentur volumine) nam ab eximio Mathematico Franc. Schooten (qui curam totius operis repurgandi in ſe ſuſceperat, & elegantiſſimè abſoluit) huic propoſitioni fuit ſubiunctum ſcholium, ſibi ex noſtra tranſmiſſum Italia, ad locũ illuſtrandum ſatis idoneum, vt ipſemet teſtatur in notis.

ADNOTATIO.

NON pauci pro deſcriptione heptagoni laborarunt, & ferè omnes in vna ſuarum Decadum Io: Camillus Glorioſus retulit, & vt Pſeudographos reprobaverat, deinceps ſanè erunt ab ipſa Geometria exulandi, nam & heptagonum, & alias figuras imparium laterum, facultas ipſa exhibet, vt infra docebimus, quod hactenus inter impoſſibilia erant collocata, & nihilominus adeò faciliter traduntur, vt melius optare cenſeatur minime poſſe quicquam.

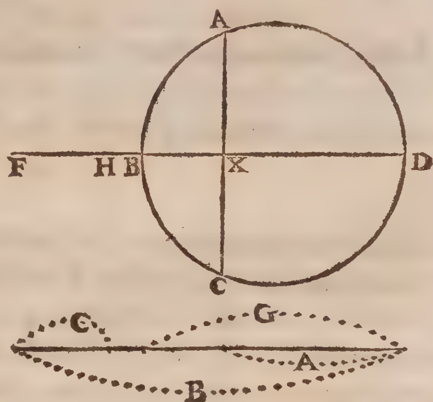
PROBL· DECIMVMQVINTVM

Datam ſphæram ita ſecare, vt portiones inter ſe ſint in ratione data.

DEſumimus hoc ex ſecundo de ſphęra, & cilindro, propoſitione quarta eximij illius Siculi Senis, & libenter ſupponimus authoris, quæ ad noſtra non peruenere tempora ignota haud eidem potuiſſe haberi, attamen, quæ à ſcholiaſte Eutocio, & nuper à Fleurantio repaſtinata videntur, ad conſtructionē completam nihil conferre omnes fatentur, vt opus fuerit ſuppetias è mechanicis implorare: nos verò profitemur cuncta debere expelli, cum viderint ſtudioſi per ſua principia facultas ſibi ſufficere.

Sit igitur ſphęra ſecanda ABCD tali plano, vt vna portio ſe habeat ad aliam in ratione R ad S data, ponatur factum, vt cum Analyſtis rem abſoluamus, & ſectio facta erit, circulus ijſdem elemētis ſignatus, eius diameter, atque axis BD, cui indirectum ea quæ ex centro æqualis adijciatur BF, deindè eadem ſecetur puncto H, vt ſit FH ad HB in ratione data R ad S, porro tum analyſis, tum ſyntheſis Archimedea eò conducit, vt oporteat iterum diametrum BD nouo ſecari puncto, vt verbi cauſa in X, et fiat quadratum partis DX ad quadratum diametri BD, vt longitudo FH ſe habet ad longitudinem FX, quo facto conſequēter oſtendit author, quod planum ſecans ſphæram per

per punctum X transiens, et diametro insiſtens ad normam quęſitum abſoluere, hoc eſt fieri ADC portio ad portionem ABC in eadem eſſe ratione, veluti FX ad FH, ſcilicet R ad S, quare puncti illius *X* inuentio fuerat ſcopulus, in quem impacti hactenus omnes labores declinarũt proprios. Transponatur *FD* linea, (quę continet ter ſemidiametrum ſphęrę) et ſimul conceſſis punctis, deinde per analyſeos præcepta *DF* dicatur *B*: portio *FH* dicatur eſſe *C*: et diameter vocetur G, demum ignota *DX* sit *A*, vt *F*X fingatur eſſe *B* -- *A*, ex hiſce per conſequentia artis analyſeos, quod ignotum eſt manifeſtum fiet, etenim dicebamus debere eſſe in analogia *GQ* ad *AQ*, vt *B* -- *A* ad *C* quartum, ſcilicet illud eſt vt *DBQ* ad *DXQ*, sit *F*X ad *FH*, porrò ad ęqualitatem conuerſa analogia, ſolida facta ęqualia erunt



$$GQ \text{ in } C = \begin{matrix} B \text{ in } AQ \\ -- AC \end{matrix}$$

Igitur res deuoluta eſt ad analyticum tertium ex ſupra inductis ab Anderſono, nempè.

Ex ſerie

„ *Ex serie quatuor proportionalium data secunda, & ag-*
„ *gregato primæ, & quartæ exhibere proportionales.*

Quare si inter *G*, & *C* magnitudines datas, inueniantur binę in analogia cõtinua, erit illarum prima maior latus cubi ęqualis solido, quod fit ex *GQ* in *C*, sit illa *D*, ęqualitas ergo erit noua,

$$D \text{ cubus} = \frac{B \text{ in } AQ}{- AC}$$

Et ideò latus cubi *D* erit in analogia quatuor proportionalium secunda nempè $\overset{1}{A};\ \overset{2}{D};\ \overset{3}{\frac{DQ}{A}};\ \overset{4}{B - A}$, & si quidem manentibus aliis, prima, & tertia ęqualiter multiplicentur per ipsum A, analogia non turbabitur & erunt $\overset{1}{AQ},\ \overset{2}{D},\ \overset{3}{DQ},\ \overset{4}{B - A}$, iterum proportionales, sicque vt prius adparet, quod factum sub extremis æquatur facto sub medijs, cumque prima sit A, secunda *D*, & adgregatum primæ & quartę ipsum *B*, è quo si auferatur prima *A*, relinquetur quarta *B---A*, & ducendo secundam in quartam fiet compositum ęquale quadrato tertię, ergo $\left.\begin{array}{l} D \text{ in } B \\ - D \text{ in } A \end{array}\right)$ ęquale *D* quadrato, porrò si ordinetur æqualitas, segregando scilicet à notis ignota, erit $\begin{array}{l} D \text{ in } B \\ - DQ \end{array} = D \text{ in } A$, adhibita nẽpè antithesi, ergo si abs facto plano rectangulo sub *D* in *B* lateribus auferatur *D* quadratum, & quod est reliquum dicatur *F* quadratum, tunc æqualitas redit

FQ-

FQ = *D* in *A*, & reuocata ad analogiam

Ita *D* ad *F*, vt *F* ad *A*, at magnitudines tres priores notæ ſunt, quarta igitur ſtatim innoteſcet, quę fuerat *A*, nimirum *DX* in ſchemate, ergo punctum X quæſitum ſignatum habetur, cumque ab initio erat conuertendo,

vt *DXQ* ad *BDQ*, Ita *FH* ad *FX*

planum tranſiens ad rectos angulos ſuper diametrum, hoc eſt *AXC* ſecabit ſphæram in duas portiones *ADC*, & *ABC* in ea ratione, vt *FH* ad FX, ſcilicet *R* ad S data, quod erat faciendum.

ADNOTATIO.

AD huius inſtar nõ pauca apud Authores plurimos poterunt reſtitui, & ad genus planorum penitus reuocari, quod relinquimus otioſioribus, nobis ſatis fuerit aperuiſſe methodum, ac prętuliſſe facem.

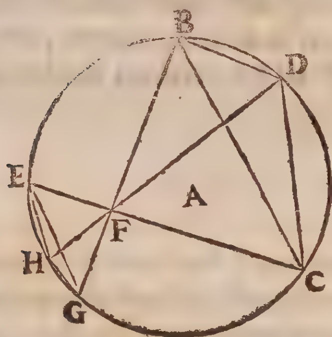
PROBL. DECIMVMSEXTVM

In vno, eodemque circulo ſimiles, ac inæquales duas portiones ſuſcipere.

SIt circulus circa A centrum, & in eo ducatur quęlibet linea diametro minor, vt BC (etenim propoſitio eſt de portionibus inæqualibus) fiant ſuper extrema puncta BC anguli ſemirecti CBF, FCB, erit reli-

quus

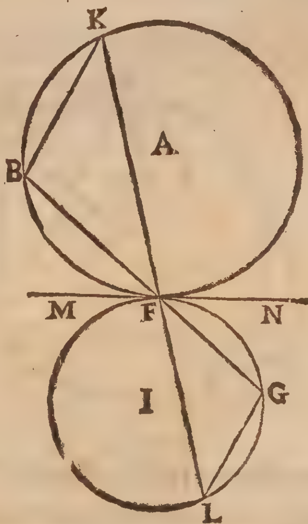
quus angulus *BFC* in eodem triangulo rectus, & productis lateribus *CF*, *BF* vſque ad peripheriam, & iuncta *EG*, etiam in alio triangulo *EFG* ſemirecti fient anguli ad baſim *EG*. Dico quod portiones *BDC*, *EH G* ſunt ſimiles in eodem circulo, & quod inæquales ſint probari non debet ex euidentia. Accipiatur aliquod punctum D, & hoc ad libitum, ex quo per F communem verticem ducatur DFH, portiones oppoſitè ſecabit ſimiliter, et fiet, vt BD, ad DC, ita GH ad HE, ſi enim iungantur cordę BD, CD, nec non HG, HE, anguli BDH, BGH ſuper eandem peripheriam BEH ęquales ſunt, vt etiam anguli DHG, DBG ſuper eandem inſiſtentes peripheriam DCG pares ſunt, reliqui verò ad F ſunt verticales, quare ex ipſa ſimilium definitione figurarum, illa duo triangula ſimilia eſſe non poteſt inficiri, et eodem prorſus modo ſimilia fiunt duo oppoſita alia triangula EFH, DFC demonſtrari poterit, & quibuſuis aliis productis per aliam lineam è puncto in diuerſo ſitu abs D, Ideò ratio eadem fit arcus B D ad DC, quę GH, ad HE, siuè alternè BD ad GH, vt DC ad *HE*, siuè componendo, et per conuersionem, siuè diuidendo, igitur nihil officit ad argumentandum



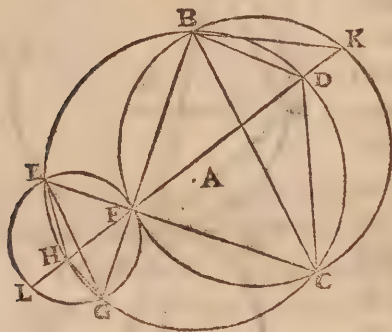
dum de angulis, vt factum eſt de peripherijs ſimul congrue ad centrum poſtea relatis, quare in circulo eodem duę ſumptæ fuerunt portiones ſimiles, & inęquales, quod erat faciendum

ADNOTATIO PRIMA.

VErum quę recenter inducuntur niſi ad vltimum principiorum fuerint reſoluta agnouimus frequenter ingerere ſcrupula, præſertim ijs, qui non admodum ſunt prouecti, & ad criticen fiunt procliuiores, vt igitur omnibus fiat ſatis, & ſequentium pateant fundamenta facilius, ſint duo inæquales circuli ſe contingentes in *F* puncto, quorum *A* & *I*, centra, conſtat ex 12. tertij elementorum, puncta eadem ſi iungantur tranſire per punctum contactus, & æqualiter circulos ſecari; at ſi per duas quaſuis lineas non per centra, in puncto tamen *F* contactus se ſecantes, portiones ex aduerſo ſimiles fieri, vt in ſchemate *BG*, KL, & iunctę *BK*, *LG* nec non coalternę por-



tiones ſimiles eſſe, nam duo ſunt triangula *BF*K, *GFL*, & per contactum ad angulos pares ducta *MFN*, iam anguli *MFB*, *BKF*, vt in coalterna portione ſunt ęquales, ſicut *NFG*, *FLG* eadem ratione ſunt ęquales, ſed anguli *MFB*, *NFG* ſunt verticales; ergo anguli *B*K*F*, *GLF* ſunt æquales, quare æquiangula triangula fiunt, & portiones æqualibus angulis competentes ſimiles fiunt, & quod in diuerſis circulis contingit, in vno & eodem fieri circulo, aſſumi poſſe oſtendit problema prçmiſſum, & ſic euidentius licèt confirmari, nam ſi circa duo triangula *BFC*, *EFG* ſcribantur circuli ſe contingentes in *F*, & *DH* ducta linea, ex vtraque parte educatur ad ſigna peripheriarũ *L*, K, portiones *B D*, & *GH* ſimiles fieri iam planum eſt in vno eodemque circulo, veluti in diuerſis *EFGL*, *CFBK* triangula *B* K*F*, *GLF* ſimilia, & ita ſe habere *BD* ad *GH*, peripheriæ



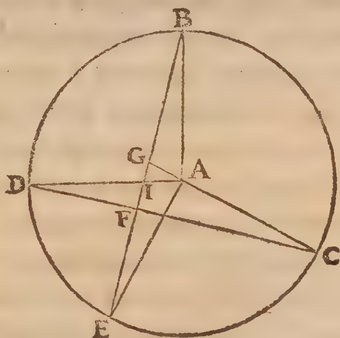
eiusdem circuli, sicuti *BK* peripheria vnius ad LG peripheriam alterius circuli, ob similitudinem triangulorum *BFK*, *GF*L, ergo & permutando erit ita *BD* peripheria ad *B*K peripheriam vt *GH* ad *G*L, arcus ad arcum, quod hæ comparationes & omnes aliç fieri pote-

runt ob similitudinem arcuum obtendentium angulos æquales, nam omnes ad vnum relatæ portiones circulum, habebunt angulos proportionales, competentes peripherijs inæqualium partium vnius, siuè diuersorum circulorum.

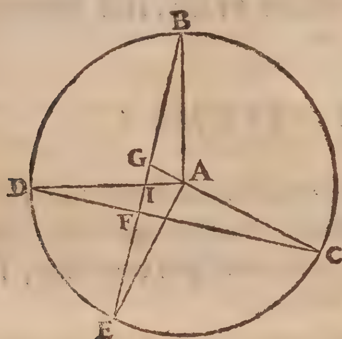
ADNOTATIO SECVNDA.

DVÆ lineæ in circulo æqualiter se secari non posse Elementator ostendit, nisi per centrum transeant, & si altera bifariam, ab altera per centrum, fieri ad angulos rectos, & è contra,

Cui non incongruè addi potest, si in circulo sint duę æquales lineę se secantes, numquam vicissim in partes ęquales nisi se comittant ad ãgulos rectos, nec similitudo exurget nisi partes reciprocè adęquantur. Sint in circulo, cuius A centrũ duæ ęquales lineæ DC, BE ita compositę ad angulos rectos in F, vt se secent, & pars BF vnius sit ęqualis parti alterius FC, sicque DF huius reliqua ęquetur FE alterius, tunc continget portiones BC, DE in eodem circulo similes euadere, quod in problemate est demonstratum,



anguli deindè diuersorum circulorum reuocantur ad centrum vnius, siuè anguli similium partium in vno, & eodem ad centrum per incrementa, & decrementa penitùs paria, vt in circulo si iungantur lineę *BA*, *DA*, *EA*, *CA*, angulus rectus extra centrũ *EFD* reuocatur ad veram quãtitatẽ anguli *DAE* in centro debitam arcui *DE* per decrementa, nam si auferatur an



gulus *ADF* in triãgulo *IFD* relinquetur externus *DIF* angulus, à quo iterum auulso angulo *AEI* habetur in centro angulus *DAE*, & sanè decrementa si accedant angulo conuerticali *BFC*, angulus redibit *BAC* arcui *BC* competens, etenim si angulo recto *BFC* accedat *GCF* angulus, erit horum summa externus (porrecta *CA* in *G*) *BGA*, cui rursus additus *ABG*, fiet summa angulus in centro *BAC*; sed duo decrementa *FDI*, *AEG* ęqualia sunt incrementis *GCF*, *ABG* ex vi ęqualium Isoscelium, & angulorum supra basim, & hęc addere sustinuimus ad omnem tollendum scrupulum in sequentibus prętter familiarem nobis stilum.

PRO-

PROBL. DECIMVMSEPT.

Angulum planum quemcumque secare tripartitò, & in alia qualibet analogia, per solas quippe lineas rectas.

SVpra ex peripheria semicirculi, & lineas rectas geometricè angulum secuimus planum trifariam, modò per solas lineas rectas non tripartitò tantum, sed in alias impares secari aggredimur partes, & quidem de trisectione tùm alibi, tum in octauo Geometriæ practicæ libro ad xxv. propositionem agens Clauius sanè inter scriptores clarissimus vtebatur Nicomedeo artificio in describenda Conchoide, cum aptius nihil haberetur, quod quidem mechanicum si rectè animaduertatur nos in primo problemate expunximus per opus legitimè Geometricum. Interim Clauij verba addi hìc possunt, & sunt sequentia

„ *Problema hoc veteres diù multumq; exagitauit, nec ab*
„ *vllo ad hanc vsque diem geometricè solutum est, &c.*

Quis vtique si dixisset augulum planum secari vlterius á tripartitò per loca imparia, in desperatam respondissent vniuersi solutionem incidere, at me memineram aliquando occurrisse in ijs, quæ omnium Geometrarum maximus scripserat Dositheo suo, initio scilicet libelli de spiralibus, vbi sic ait Archimedes.

„ *Quot in Geometria visa sunt primum impossibilia, quæ tempore suam capiunt perfectionem.*

Quæ quidem verba fateor plurimum me iuuasse,

adeo

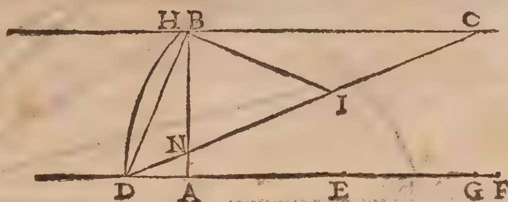
adeò vt in animum induxeram firmiter, in philosophando minimè oportere in aliorum acquiescere sententiam, vbi nulla emergeret impossibilitas, Immò nec ignotum fuerat mihi, tantò præstantiora semper haberi inuenta, quantò minus operosa, quia ad naturæ rationem videantur accedere simpliciora, quam magis composita, idcirco omnes intenderam neruos, vt veterum, ab vsu omni ablegarentur machinamenta, & quid in hoc profecerimus aliorum est iudicium, ac fortasse non abludet vatis illud elegans

Nec omnia grandior ætas,

Quæ discamus habet: Seris venit vsus ab annis.

Proponimus igitur ex sui natura in infinitum secari angulum planum posse, per solas lineas rectas, nisi ob nimiam ipsarum inclinationem difficultas emergeret, & hanc etiam euitabimus in proximo problemate. Sit interim propositus angulus trisecandus *ADB*, demittatur perpendicularis *B*A, & punctum *B* arbitrariè sumptum, ducat parallelam *BC* ipsi *DA*, deinde ex *A* ponatur *AF* æqualis duplæ *BD*, & *AF* diuisa bifariā in *E*, quo facto centro, ac distantia *ED*, vel circuli pars scribatur *DH* (& quia punctum *B* potest infra si oporteat accipi, semper resecabitur parallela in *H* puncto, quocumq; cadat) porrò sumpto interuallo *FH*, transferatur in *DG*, & portio *A*G in *BC*. Dico puncto *C* effici quæsitum, nimirum ducta *DC*, secare angulum trifariam, quoniam igitur in problemate huius opusculi primo demonstratum est, eadem constructione fieri *NC*, *AF* lineę æquales, si diuidatur *NC* bifariam

fariam in *I*, ibique centro, ac interuallo *IC*, ſeu *IN* circuli, vel ſemiſſis ſcribatur, neceſſariò tranſire per punctum *B* ob angulum rectum euidens eſt; igitur ducta *BI*, quatuor lineæ erunt *CI*, *IB*, *IH*, *BD*, duo conſtituentes iſoſcelia *BIC*, *DBI* æqualiũ crurũ, & ideò



angulus *BID* externus trianguli *BIC*, duplus interni alterutrius, ſ t *BCI*, at *BID* angulus ęquatur *BDI*, in alio Iſoſcele, quare anguli *BCD* etiam duplus ſit angulus *BDC*, & ambo *BDC*, *BCD* adequat angulus externus *DBH*, ergo ſit *DBH* triplus interni *BCD*, ſed angulo *DBH* eſt coalternus *BDA*, eidem æqualis, vt *ADN* coalternus angulo *BCD* æqualis, relinquitur ideò *BDC*, duplus anguli *ADN*, quare totus *ADB* datus angulus trifariam eſt ſectus, eiuſque triens *ADH*, quod erat fieri imperatum.

Sit deindè angulus *ADB* ſecandus quintufariam, ijsdem inſiſtendo veſtigijs perficietur, limitari tantum eſt opus appoſitam *AF* indirectum ipſi *DA* protractã, & in hoc caſu fiat, vt contineat ipſam *BD* ter cum ſemiſſe vnius partis, deindè diuiſa *AF* in *E* bifariam, & diſtantia *ED* acquiratur *H* punctum, & linea (ſi duceretur) *HF* reponatur in *DG*, ſicuti *AG* in *BC*, quod

& ſupra

& ſupra idem factum fuit. Dico *C* puncto fieri quæſitũ.

Etenim ſi ſcriberetur circa *NC* ſemicirculus, vtiq; tranſiret per *B* ob rectum angulum, & ſi *DB* amplitudo alterni ponatur in *BL*, *LK*, K*I*, *IC*, erunt quatuor iſoſcelia æqualium crurum *CI*K, *KIL*, *L*K*B*, *BLD*, quare externus angulus K*IL* fiet duplus interni *ICK*, & *L*K*B* triplus, *BLD* quadruplus, & demum in totali triangulo *BCD* externus angulus *DBH* fiet anguli eiuſdem *BCD* quintuplus, hoc eſt *BDA* coalternus illi quintuplus anguli *ADN* coalternus *DCB*, quare angulus datus *BDA* ſectus eſt quintufariam, eius quintans *ADN*, quod erat, &c.

ADNOTATIO PRIMA.

NEque in alijs ſectionibus imperatis imparium varium quicquam occurret, tantùm pro ratione mul-

ne multipla longitudo lineæ *AF* venit limitanda, & pro hac damus hic canonis partem ampliandam ſi lubeat, at vt innuimus ſubobſcurè apparebunt puncta ob nimiam inclinationem, quod quidem impedimentum auferetur in ſequenti opere per ſuum genus proximum expoſituri.

Pro anguli plani triſectione per lineas rectas longitudo proportioue.

AF ad *BD* fiet	vt	2.	ad	1.
In quintupla ſectione	vt	7.	ad	2.
In ſeptupla ſectione	vt	5.	ad	1.
In noncupla ſectione	vt	13.	ad	2.

& ſic vlterius ſi placet per additionem proportionis ſeſquialteræ $\frac{3}{2}$ ad proximè ſequentes impares, &c.

ex hiſce agnouerint eiuſmodi rei ſtudioſi, quid acceſſurum ad libellum Vietęum, & ad notas Anderſoni, ad ſectiones angulares, inuentum planè ratiocinij acutiſſimi, ſub inuolucris graduum, ac poteſtatum, indicare analogias, inter latera ſe ſe in multipla ratione excedentium angulorum, verum ipſorum triangulorum exhibere magnitudines non poterant, negotium purum eſt geometricum, & ab ipſa accuratè tantum expectandum.

ADNOTATIO SECVNDA.

VErum angularis ſectio in propria ſui natura eſſe circularis, & in ſuo genere exercenda, omnes

K cogun-

coguntur fateri, quæ verò alia methodo, siue per re-ctas, & circulares, siue per rectas lineas, vt proximè factum est, suas habent limitationes, aut si mauis im-perfectiones, tantùm liberè, perfectè fieri queunt se-ctiones ex congeneo sibi arcu, quo igitur adhibito, fe-liciter per sectiones omnes pares, ac impares, effabiles, aut ineffabiles progredi, aut regredi licebit, ad hęc si respexissent veteres exequandi, ac explendi lacunam hanc ipsis tàm vastam vtique nobis haud reliquissent onus, at quod arduum videbatur, ingressi naturæ ve-stigia facillimum experitur.

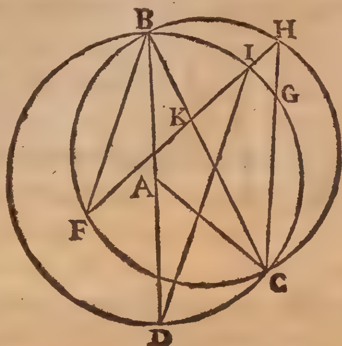
PROBL. DECIMVMOCTAVVM

Angulum datum planum secare trifariam per circuli peri-pherias expedire sectiones omnes poteramus vno actu gene-rali, at lubet incitati rei pulchritudine per non nullos ex-currere, & vt ijs qui hoc fieri posse inficias iuere, directè opponamus factum scilicet pro heptagono, ac enneagono &c.

SIT itaque angulus *BAC* trisecandus, siue eidem congruus arcus *BGC*, ducatur *BC*,& circulo com-pleto *DBGC*, in eo ponatur *BG* amplitudine semidia-metri pars sexta *BG*, & semicirculi triens, deinde circa cordam BC perficiatur circulus alius *BFCH*,in quo su-matur quadrans *BC*, aut *FC*, deinde ex puncto *C* per *G* datum punctum in peripheria ducatur recta *CGH*, se-cabitur circulus *BFCH* in puncto *H*, ad quod si ex pun-cto quadrantis *F* deducatur linea *FH*, iterum secabitur

circu-

circulus prior *DBGC* nouo puncto in *I*. Dico abſciſſam portionem *BI* trientem eſſe portionis *BGC*, ſeu ad angulum in centro relatæ, angulus *BAI* (ducta *AI* non eſt) ſubtriplus fieri angulo dato *BAC*, quoniã igitur, vt demonſtratum eſt inæqualium circulorum æquales anguli ſimiles auferunt peripherias, & ſunt in circulo ſimilia triangula *BF*K, *CKH*, etenĩ anguli *CBF*, *CHF* eidem inſiſtunt peripheriæ, & qui ad vertices K æquantur, quare



reliqui *BFH*, *BCH* æquales, quia ſuper eadem inſiſtunt peripheria *BH*, & explent duos rectos, & vera quantitas anguli *BFH* eſt angulus *BDI* in ſua peripheria *BI* deſignatus, quare ſimiles in diuerſis circulis fiunt *BG*, *BH* peripheriç, ſicut *BH*, & *BI* inter ſe ſimiles, hæc vt portio *BC*, ſiue anguli *BAC*, illa vt portio ſemicirculi ſui *BHC*, angulus namque *BFH*, & ſi non pertingat ad alterius circuli arcum, quum æqualis ſit oſtenſus alteri *BCH* pertingenti, duas facit ſimiles *BH*, *BI* portiones, ergo quæ pars fuerit *BG* ſemicirculi *BGD*, eadem fiet *BI* pars ſuç portionis aſſumptæ *BC*, hoc eſt comparatione relata ad angulos in centro, angulus *BAG*, quç pars erit duorum rectorum, aut diuidendo, quæ pars *BG* erit relata ad *GD*, ſiue angulus *BAG* ad angulum

K 2 *GAD*

GAD, eadem ratio erit anguli *BAI* ad angulum *IAC* ſed erat angulus *BAG* triens duorum rectorum, ergo & angulus *BAI* triens totius anguli *BAC*, quare ſectus erit arcus ſiue angulus trifariam, & quidem faciliter per planum, quod erat faciendum.

ADNOTATIO PRIMA.

NOn eſt tam propria triſectionis effectio hæc quin pro omnibus demonſtrari queat, quod infra facturi erimus vniuerſaliter, at quia deſumpſimus *BG* ſextam circuli partem, & idem licebit pro quinta, ac quindecima, quę hactenus Geometria ſuppeditare nouit, & ex demonſtratis ſequitur in eadem ratione ſe habere *GI* ad *DC*, vt *BI* ad *IC*, ſeu *BG* ad *GD*, nam vt totus arcus *BC* ad totum *BCD* arcum, ita ablatum *BG* ad ablatum *BI*, ergo & reliquus *DC* ad reliquum *BI*.

ADNOTATIO SECVNDA.

HActenus facultas minimè nouerat ad alia imparium loca, vt innuimus extendere effectiones, ars vero ex analyſi Vietęa inducta pulcherrimè quippe fuerat, at inſufficiens, vt à genere improprio ortum ducens, vt igitur aliquod, & facilius ſpecimen oſtenderet Author ingenuè pronunciauerat cap. 5 in reſponſo ad Adrianum nõ eadem facilitate quà componũtur problemata poſſe reſolui, neq; enim opus, quod geometricè cõponitur, per eadem Geometricè reſoluitur, ſcilicet.

„ *Ad da-*

„ *Ad datam primam, & ſecundam conſtruo ſeriem continuè proportionalium* εἰς ἄπειρον *, at non ideò ex data prima, & quarta, vel ſexta exhibeo geometricè ſecundam.*

Ponatur circuli portio, cuius corda ſit *D*, & ea quæ ex centro ſit X, ſint igitur in ſerie quatuor proportionalium X data prima, & *D* differentia, qua triplum ſecundæ ſuperat quartam, oporteat inuenire ſecundam.

Peritus logiſta hìc inquirit arte, ponendo magnitudinem ignotam eſſe *A*, quare proportionales quatuor erunt

$$\overset{1}{X}. \quad \overset{2}{A}. \quad \overset{3}{\frac{AQ}{X}} \quad \overset{4}{\frac{AC}{XQ}}$$

& ex iis, quæ, ponuntur triplum ſecundæ ſit *A3*, multatum quarta, fiet æquale *D* dato, vnde æqualitas hæc erit.

$$3A - \frac{AC}{XQ} = D$$

, quod homogeneum dicitur comparationis, & ſi omnia ducantur in *XQ* ad expurgandas fractiones, æquatio noua erit

$$XQ \text{ in } A3 - AC = XQ \text{ in } D$$

& quia in opere diuiſionis, ſeu multiplicationis vnitas nihil immutat, erit $3A - AC = D$

& vſque huc Analyſta ſuum deducit ex arte epilogiſmũ indicans, quod ad eruendum latus *A*, neceſſe haberi, vt arcus ſiue angulus trifariã ſecetur, quod à nemine hacte-

nus

nus per prĩcipia germana facultati nouimus geſtum, & tunc geometriæ occurrerant per aliquod mechanicum, & arithmetricæ, per induſtrioſam diuiſionem homogenei comparationis, addendo ſolida, verùm ſua laude inuentiò eiuſmodi (antiquioribus ignota) fraudari non licet, ſed ad accuratè quæſitum aſſequendum prorſus digrediens. Porrò in ſerie ſex linearum continuè proportionalium ſi daretur prima, & recta æquali ſecundæ quintupla, plus ſexta minus quintuplo quartæ ad exhibendam ſecundam, ſimiliter pro ſecunda poneretur *A* ignotum, & fieret logiſtica ſeries,

$$\overset{1}{X}.\quad \overset{2}{A}.\quad \overset{3}{\frac{AQ}{X}}\quad \overset{4}{\frac{AC}{XQ}}\quad \overset{5}{\frac{AQQ}{XC}}\quad \overset{6}{\frac{AQC}{XQQ}}$$

& æquatio ex iis, quæ proponuntur fieret,

$$5A - \frac{AC5}{XQ} + \frac{AQC}{XQQ} = D \text{ ſolido}$$

& expurgatis fractionibus, omnia ſcilicet ducta in *XQQ* fieret *XQQ* in A5 --- XQ in AC5 ✠ AQC = XQQ in D ſolidũ, & quia vnitas nihil immutat ſublata, noua erit ęquatio 5N--5C † 1QQ = D ſolido ſic vlterius ſi ſeries fieret octo linearũ in continua analogia ex data prima, & recta qua ſecundæ ſeptuplum, plus ſeptuplo ſextę ſuperat quartam quater decies, vna cum octaua ad exhibendam ſecundam, eſſet ſeries logiſtica.

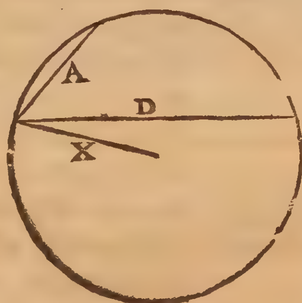
1	2	3	4	5	6	7	8
$X.$	$A.$	$\frac{AQ.}{X}$	$\frac{AC.}{XQ}$	$\frac{AQQ.}{XC}$	$\frac{AQC.}{XQQ}$	$\frac{ACC.}{XQC}$	$\frac{AQQC.}{XCC}$

& ex ijs, quæ proponuntur æqualitas esset,

$$7A - \frac{AC}{XQ} + \frac{AQC\,7}{XQQ} - \frac{AQQC}{XCC}$$ æqualia D solido,

& si expurgentur à fractionibus æqualitas erit XCC in $A7$ -- XQQ in $AC\ 14.$ + XQ in $AQC7$ -- $AQQC = XCC$ in D & vbique expuncta vnitate ordinata æqualitas erit

$7N$ --- $14\ C$ + $7QC$ --- $1\ QQC = D$ solido, magnitudo exprimens ipsã cordã D, cuius IN latus sit heptagoni, at in sua congrua serie latus figurarũ imparium, attamen illa explicare nequit, sed sub istis algebricis inuolucris indicare, hæc induxerat ibidem doctissimus author, vt à faciliori ostenderet qua vsus fuerat methodo ad explicationem Adriani problematis, & erat prorogando præmissum thema, vt si proponeretur series quadraginta sex linearum proportionalium, & data harum prima, & recta ęquali secundę multiplici per numerum 45.



minus

	45
minus quarta multiplici per numerum	3795
plus ſexta multiplici per numerum	95634
minus octaua multiplici per numerum	1138500
plus decima multiplici per numerum	7811375
minus duodecima multiplici p numerũ	34512075
plus decima quarta multip. per numerũ	105306075
minus decima ſexta multip. per numerũ	232676280
plus decima octaua multip. per numerũ	384942375
minus viceſima multip. per numerum	488494125
plus viceſima ſecũda multip. per numerũ	483841800
minus viceſima quarta mult. per numerũ	378658800
plus viceſima ſexta multip. per numerũ	236030652
minus viceſima octaua mult. per numerũ	117679100
plus triceſima multiplici per numerum	46955700
minus triceſima ſecunda per numerum	14945040
plus triceſima quarta multip; per numeruũ	3764565
minus triceſima ſexta multip.per numerum	740259
plus triceſima octaua multip. per numerum	111150
minus quadraceſima multip. per numerum	12300
plus quadraceſima ſecunda per numerum	945
minus quadraceſima quarta per numerum	45
plus quadtaceſima ſexta	

„ *Inuenire ſecundam*

„ *Vbi author ſubiungit,* Quid igitur quærit á Geometris Adrianus Romanus?

„ *Datum angulum trifariam ſecare.*

„ *Datum angulum quintufariam ſecare.*

Et quid ab Analyſtis?

„ *Datum*

„ *Datum ſolidum ſub latere, & dato coefficiente plano*
„ *adfectum multa cubi reſoluere.*
„ *Datum quadratocubum adfectum adiunctione quidem*
„ *plano ſolidi, ſub latere, & dato coefficiente planoplano,*
„ *multa verò plano ſolidi ſub cubo, & dato coefficiente*
„ *plano reſoluere.*

Quare quærenti Adriano licet ſiue in Geometricis, ſiue in Arithmeticis ſatisfacere, *Adſcito nempè eo quod ad ſupplementum Geometriæ inducendum fuit poſtulato,* hactenus eximius author, qui mira prius dexteritate non ritè propoſitum emendauit, ac reſolutum euulgauit, nihilominus quum hæreret principio minimè facultate ipſa probato, deinceps accuratum penitus adeſſe cognoſcent ſtudiosi, expoſituri generalem formam anguli diuidendi in partes imperatas, & impares, & ex conſequenti medias proportionales, quæ in ſerie Analogica ſunt opportunæ.

ADNOTATIO TERTIA.

OMnes quippe eruditi, qui de eiuſmodi doctrinis verba fecerunt, artem ſecandi angulos per loca imparia tàm difficilem cenſuere, vt nulla ſpes ab vllo concepta exoriretur, attamen, minimè à labore deſtiterant, quin Analyſim Algebriſtarum promouerent, id quam maximè authores *B*rittannicę in opere tam vaſto præſtitiſſe licet inſpicere, at numquam pronunciauerat quiſpiam effectionis im-

possibilitatem, vt etiam ex eadem insula author, (vt alios missos faciamus) in opusculo, cui Arithmetices clauis indiderat per sequentia verba testatus fuit.

„ *20 de angulorum, siue peripheriarum bisectione, trise-*
„ *ctione, quintusectione pauca etiam ad analystices præ-*
„ *stantiam, vsumq; admirandum ostendendum apponam.*
„ *Geometricam quidem praxim adhuc inuentam non ha-*
„ *bent: sicut nec mesolabium inuentum est, &c.*

Alacres quippe Analystarum studiosi hactenus incedebant, quasi sibi primas deberentur, quia ex earum laboriosa artis cultura plurimi fructus excerpere viderentur, & geometria quodam exposita apparebat ludibrio, at ipsa tandem excitata accuratè, & facillimè suas adimplet lacunas. Pugnauit acerrimè aduersus eam magni sanè ingenij vir Kepplerus, qui pluries sectionem anguli trifariam negauerat, at quia cum eo paulo infra erit noua occasio velitandi, nihil modò responsi damus.

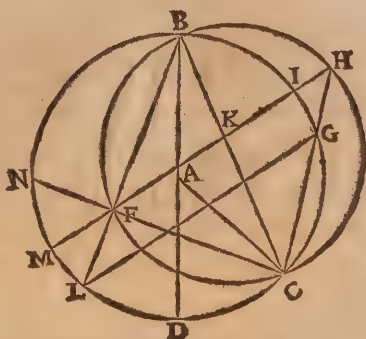
PROBL. DECIMVM NONVM

Angulum, siue Arcum quemlibet planum in data ratione secare.

SIT angulus *BAC* secandus ea ratione, vt se habet *BG* ad *BD*, duarum scilicet partium inter se duorum rectoru n: compleatur circulus circa diametrum iunctę cordæ *BC*, sit *BHCF*, & in eo quadrans sumatur

BF;

BF, deinde per datum *G* punctum ex C agatur linea *CGH*, & habebitur in ſecundo circulo punctum H, ex quo si ducatur linea *FH* in priore circumſignabitur punctum *I*, quo aio effici imperatum; nimirum ita ſe habebit pars *BI* reſecta ad reliquam *IC*, veluti *BG* ad *GD*: ducantur per *F* punctum duæ lineæ *BL*, *CN*, quę æquales erunt, ex



paritate arcus, quibus ſunt ſubtenſę, etenim *BF*, *CF* quadrantes ſunt ex ipſo opere, ideò anguli ad *B*, & *C* vterque ſemirecti, & quadrantes ſunt etiam *BN*, *CL*, oppositę ſcilicet peripthariæ ad angulos ſemirectos, & communis addita *LN*, æquales erunt *BNL*, *CLN*, ergo & ſubtenſę *LB*, *CN* ęquantur, quæ extra centrum ſecant ſeſe ad rectos angulos, quare ex pręoſtenſis similes ſiunt portiones *BGC*, *LMN* in eodem circulo ſumptę, & in diuersis, ducta ſcilicet *HFM*, ergo ea erit ratio *BG* ad *GD*, quæ *BH* ad *HC*, & eadem *BH* ad *HC*, quę *BI* ad *IC*, ideo ex ęquali, vt *BG* ad *GD*, ita *BI* ad *IC*: ſecta igitur erit portiò arcus *BC* in *I* puncto in ratione data *BG* ad *GD*, & relatæ ad angulos in centro, quę ratio erat anguli dati *BAG* ad *GAD*, eadem facta erit anguli *BAI* portionis datæ, ad reliquum angulum *IAC* eiuſdē

L 2 por-

portionis, quod erat imperatum, & ſequitur ita ſe habere *IG* ad *DC* vt ſupra oſtendimus.

ADNOTATIO.

MAnifeſtum igitur relinquetur Pappi reſcriptum, quod ſectionem anguli plani vltra triſectionem, quam ad ſolidi genus pertinere voluerat, verum non eſſe, ſpectare ſcilicet ad lineare genus ſi proponeretur ſecari in ratione analogica; omnes omninò ex vno loco ſuam originem trahunt, nempè à genere primario planorum, & ſi me non lateat illud Poetæ.

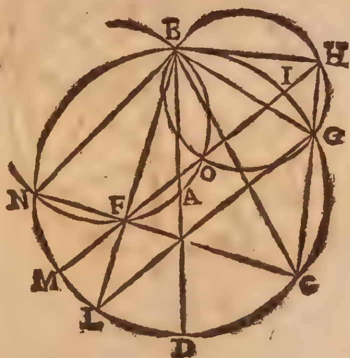
„ *Nec veniam antiquis, ſed honorem, ac præmia poſci.* veritati nihilominus tenemur magis, quam authoritati deferre, & quidem quos in facultatem defectus reiecerant, in cultores potius fuerant referendi, qui ſuas minimè curarunt experiri vires, & ne alicui ſcrupulum ſurrepat, quę hucuſque ſunt demõſtrata ad ãgulos duobus rectis minores fuiſſe coarctata, generaliaq; non eſſe præcepta, ſcrupulus ſtatim euaneſcet, ſi cuiusuis anguli dati plani per biſectionẽ quantitas reducatur ad minorem duobus rectis, & operatione peracta, per quoti duplicationem accurata pars reſultabit, hæc ideò addidimus ne in ſcirpum nodo locus fieret.

PRO-

PROBLEMA VICESIMVM.

Tribus datis angulis, ſeu arcubus, quartum in analogia reperire.

SInt angulis datis, arcus reſpondentes *BG*, *GD*, *BI* & oporteat quartum aſſignare in proportione. Compleatur circulus *BGCM*, in eoque ſit *N* punctum quadrantis, & ductis B*N*, *BG* diametri ſint ſe ſecantium circulorum in *O*, ex quo, & puncto *I* dato tranſeat *HIOM* linea, ſecabitur hoc caſu rurſus peripheria circa *BN* in *F*; deinde ex *H* per *G* etiam datum puuctum agatur H*C*. Dico hoc *C* puncto effici quæſitum. Agantur B*C*, *B*H, & quia recti ſunt ad *F* & *H* anguli, ſi circa diametrum *BC* ſcriberetur circulus, vtique tranſiret per quatuor *BHCF* puncta, iunctaque *B*F*L*, duę *CN*,*BL* nec non *CF*, *BF* erunt æquales, & ideò *CN* per *F* tranſit, ducatur *LG*, & quia



arcu-

angulus *LBC*, tàm *LGC*, quám *FBC* æquatur, vtpotè super eandem peripheriam insistentes, erunt *FHF*, *LGC* internus externo ęquales, ergo & *HM*, *GL* ęquidistãtes, & *LM*, *GI* arcus æquales; & quia extra centrum se committunt in *F* ad æquales angulos *CN*, *BL*, erit partium inęqualium similitudo, nimirum *LM* ad *LN*, ita *BI* ad *BC*, & supra ostensum fuit *LN*, & *DC* fieri æquales ex cõmuni *LD* subductione ab æqualibus *D*N, *C*L quadrãtibus; ideò erunt ęquales *BN*, *CL*, quocirca *HM* transiens per *F* secat in *O* peripheri, quod esse quadrantis punctum ostendetur; itaq; proportio erit *LM* ad *LN*, hoc est *IG*, ad *DC*, ob terminorum ęqualitatem: ergo vt IG ad DC ita *BI* ad B*C* similis simili in eodem circulo, & permutando, componendo, & per conuersionem rationis erit *BG* ad *BI*, vt *BD* ad *BC*, & iterum permutando, ac diuidendo fiet *BG* ad *GD*, ita *BI* ad *IC*. Quare trium datorum arcuum *BG*, *GD*, *BI* quartum

repe-

reperimus in analogia, ipſum ſcilicet BC, quod erat faciendum.

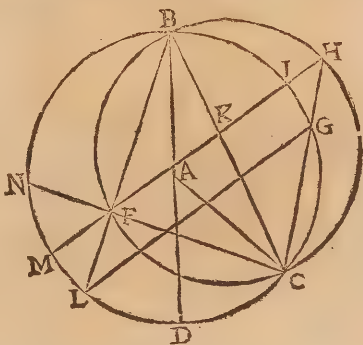
ADNOTATIO.

ET cum in quadrilatero *BFCH* ad *F*, & *H* recti erant, ductaque ſit HF ſecatur angulus BHG bifariam ob quadrantes BF, *CF* quibus ſemiſſes inſiſtunt, quare in circulo BOG*H* duo arcus quadrantes fiunt BO, & OG, quod diximus in propoſitione oſtenſuri.

PROBL. VICESIMVM PRIMVM

Data ratione duorum arcuum, in eadem opus ſit ſecare ſemicirculi peripheriam, hoc eſt ſumma duorum rectorum, in data ratione anguli ad angulum dispeſcere.

COnuerſum erit præcedentis: ſit igitur ratio arcus BI ad IC, & ſecanda ſit in hac ratione ſemicirculi peripheria BGD: ducatur corda BC, circa quã ſcribatur circulus BFCH, cuius quadrans *BF*, & agatur *FI* producta ex vtraque parte ſecabitur ſecundus circulus in *H* puncto, ad quod ex alio puncto *C* iuncta *CG*, rurſus prior circulus ſecabitur in *G*,



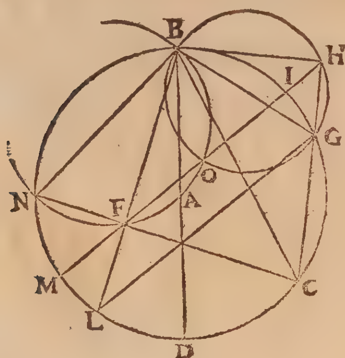
& erit

& erit quod quæritur, fitque *BI* ad *IC*, vt *BG* ad *GD* quod quidem vt in proximè præmiſſo oſtendi poterit, nec eadem rurſus repetere oportet.

PROBL. VICESIVMSECVNDVM

Dato in peripheria ſemicirculi puncto, oporteat vltra citraq; illud alia duo ſignare, vt ſemicirculi partes ſe habent, ita portiones à communi extremo diametri terminatæ puncto remotiore, ſint in eadem analogia.

IN peripheria ſemicirculi *BGD* datum ſit *G* punctum, & in ea ſint duo alia ſignanda vt (v gratia) *I*, & *C* citra, & vltra G, vt ea ſit ratio *BG* ad *GD*, quæ *BI* ad *IC*, ſumatur *BN* circuli quadrans, iungantur cordæ *BN*, BG, circa quas duo eant circuli ſeſecantes in *O* pucto, deinde inter *O*, & *N* in peripheria ſumatur pũctum ad libitum vt *F*, ex quo per idem *O* pũctum ducatur linea, quæ etiam dabit alia puncta *M*, *IH*, poſtea ex puncto *H*, ſi per *G* agatur *HGC*, erit abſolutum quæſitum, nimirum duo puncta *I*, & *C* citra, & vltra



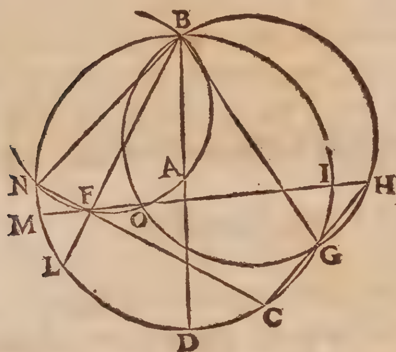
& vltra datum G ſignata erunt, & dico *BI* ad *IC* eandem eſſe rationem veluti *B*G ad G*D*. Agantur per *F* lineę *BFL*, *CFN* ſe ſecabunt ad angulos rectos in *F* ex vi ſemicirculi, quare *B*F, *FC*, nec non *NF*, *FL* erunt inter ſe ęquales, & arcus *BN*, *CL* ęquales ſcilicet quadrantes, quibus addita communis portio *LN* æquales pariter *BNL*, *CLN*, quod etiam ex ęqualitate cordarum conſtat, at *DN*, *CL* ęquales ſunt, quia quadrantes eiuſdem circuli, à quibus ſi auferri intelligatur communis peripheria *DL* erunt relictę portiones *CD*, *LN* ęquales, & ſi agatur *LG* vti eſt in 16 problemate oſtenſum, fiet vt *BI* ad *IC*, ita in ſimili *LM* ad *LN* ſiue IG ad *DC* (nam *IG* ęqualis fit *LM*, & *LN* ipſi *DC*) quare permutando, componendo, & per conuerſionem fiet ratio *B*G ad *BI* vt *BCD* ad *BC*, & iterum permutando *BG* ad *BD*, ſic *BI* ad *BC*, ac diuidendo vt *BG* ad *GD*, ita *B*I ad *IC*, duo ergo puncta inuenta ſunt *I*, & *C* efficientia quæſitũ, &c.

ADNOTATIO PRIMA.

DIximus *F* punctum inter *N*, & *O* conſiſti oportere, nam ſi in *N* fuiſſet per *O*, pertingeret ad punctum *G* præcisè, ſi verò in *O* producta tangeret peripheriam *BHGO*, & alibi inutiliter ad quæ ſitum, adeò vt oportune debeat in latitudine arcus *NO* ſuſcipi *F* punctum.

ADNOTATIO SECVNDA.

Contingere quidem posset, ex situ dati *G* puncti, & *F* assumpti, quod punctum *H* in semicirculo *BHG* excurreret, vt circulus *BGD* tangeretur à producta linea *HG*, ita vt præmissa constructio prorsus elusoria experiretur ad quæsitum exhibendum, igitur ad hoc declinandum, ducatur linea, siue corda *BG*, circa quam circulus eat *BHGO*, & inter *D*, & *G* (non quidem in ipsis præcisè punctis) sit punctum *C*, & ducta *CGH* in alio circulo *BOG* cadet, vt in puncto *H*, ex quo per datum punctum *O* acta linea, secabitur in *F* tertius circulus *BNFO*, & per punctum idē *F* conductæ lineæ *BFL*, *CFN* componentur ad angulos rectos ex punctis datis B, & *N*, quare similes fient portiones B*IC*, & *LMN*,



æquales verò *LN*, & *DC*, vt æquales *LM*, *IG*, igitur fiet *IG* ad *DC*, vt B*I* ad B*C*, siue *BG* ad *GD*, reliqua vt supra abundè ostensa repetere non oporteat.

PRO-

PROBL. VICESIMVMTERT.

Dato arcu, ſiue angulo inter eum, & ſemicirculi peripheriam medium in analogia reperire.

SIT ſemicirculi peripheria *BID*, & in ea data portio arcus (ſiue angulus) *BI*, & oporteat arcum reperire, qui medio loco ſtet in analogia inter ſemicirculum, & partem *BI*, quod erit inter duos rectos, & acutum angulum determinare mediũ. Perficiatur circulus *BIDN* eiuſq; quadrans ſit *BN*, ac corda in *E* ſecta bifariam, iungatur *EI*, & ſcribãtur circuli duo circa diametros *BG*, & *EI* ſeſecantes in *F*, aganturq; *BFL*, *GFN*. Dico punctum *G* eſſe quæſitum, ſcilicet eam eſſe rationem *BI* ad *BG*, vt *BG* ad *BD* ſemicirculi peripheriam. Circa ductã *BG* cordam circulus fiat *BHGF*, ducaturque *FI*, hæc porrecta ex vtraque parte erunt ad peripherias puncta *M*, *H* data; deinde iungantur lineę *BH*, *DG*, *HG*, duo fient triangula BDG, BGH æquiangula, quum enim in circulo duæ lineæ BL, GN æquales ſint ſe non in centro ad rectos angulos ſecantes in *F*,

 (iam

(iam quadrantes ſunt *BN,ND*,& *GL*) ſimiles euadunt portiones reſciſſę *BG,LN*,& ducta *IM*,portiones ex aduerſo ſimiles fiunt, hoc eſt eadem ratio fiet *LM* ad *LN*, vt *BI* ad BG, & quia æquales oſtendimus GL, DN, vt erant quadrantes ſublata portione DL comuni, remanent GD,LN pares, ergo vt LM,ad L*N*, hoc eſt ad *D*G, ſiue *I*G ad GD (nam ſi iungeretur linea LG æquidiſtaret lineæ IM quod oſtensũ eſt ſupra) & æquales igitur fiunt IG, ML. Ideo vt BI ad BG, ita LM ad L*N*,ideſt IG ad GD, quare permutando vt BI ad *IG*, ita B*G* ad *GD*, & componendo,vt BI ad B*G*,ita B*G* ad BD. Igitur inter B: portionem, & BD ſemicirculũ media conſtituta eſt in analogia portio B*G* quod erat faciendum.

ADNOTATIO.

EX eo quod inæqualium circulorum ſimiles ſint portiones *BH*, *BG* ſequitur anguli eiſdem inſiſtentes fieri æquales *BGH*, *BDG*, & quia in ſemicirculis ad *G*, & *H* (ducta non eſt *BH*) ſunt recti, etiam reliqui *GBH*, *GBD* æquantur, quare ſimilia fiunt triangula *DBG BGH*, id circò expeditior effectio erit ſi

NL po-

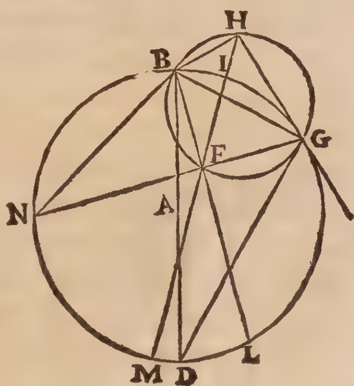
NL ponatur in *DG*, & quum in alterno ſegmento anguli *BGH*, *BDG* ſunt æquales, erit *HG* circulum tangens, & erit *G* quæſitum punctum.

PROBL. VICESIMVMQVART.

Enneagonum regulare Geometricè deſcribere.

IN ſequenti proximè, & ſi allaturi erimus generalem pro omnibus imparium laterum polygonis methodum, tamen lubet ſingularem hìc proponere, & propter illius elegantiam, & quia hanc praxim quibusdam conceſſeramus amicis, puram, & hùc remiſimus ſuam operis expectare firmitudinem.

Sit igitur circulus circa *A* centrum, & in eo ſextans *BG* expanſione ſcilicet ſemidiametri, & circa cordam illius alius ſit circulus *BHGF*, in quo rurſus ſextans aptetur *BH*, deinde accipiatur quadrans *BF* agatur linea *HF*, quæ protendatur in *M*, ſecta erit data peripheria in *I* puncto. Dico arcus *IG* fieri nona pars, & *BI* octodecupla totius circuli, hoc eſt ducta corda *IG* fieri



fieri latus enneagoni quæsiti. Agatur *HG* contingens in *G* circulum, & per punctum *F* binæ educantur lineæ *BL*, *GN* erunt abscissi quadrantes *BN*, *GL* ex similitudine duorum *GF*, *BF*, iungantur deindè aliæ *BH*, *DG*, fient anguli *BGH*, *BDG* in portione coalterna à tangente æquales, & æquales sunt recti *BHG*, *BGD*, ergo & reliqui pares, ideò similia fiunt triangula, & arcus similes æqualibus, quę subsũt angulis, quare vt *DG* ad *BG*, ita *HG* ad *HB*, & in vno eodemque circulo, vt *LN* ad *BG*, ita *GI* ad *IB*, nam æquales sunt *GD*, & *NL*, quia quadrantibus *GL*, *ND* communis apposita est portio *DL*, & in circulo æquales *NG*, *BL*, sesecant ad angulos rectos extra centrum in *F*, quare *NL*, *BG* portiones euadunt similes, vt aliæ etiam interceptæ, ideò erit *NL* ad *MN*, ita *BG* ad *GI*, hoc est per inuersam rationem *LN* ad *LM*, vt *BG* ad *BI*, ergo erit vt *LN*, siue *DG* ad *BG*, ita *LN* ad *ML*, hoc est *BG* ad *BI*, quare componendo fiet vt *BGD* ad *BG*, ita *BG* ad *BI*, media igitur erit *BG* inter semicirculi peripheriam, & portionem *BI*, ergo *BI* erit tertia pars *BG*, sicut *BG* triens est *BD* semicirculi peripheriæ, & diuidendo *GI* fit dupla ipsius *BI*, vt *DG* dupla erat *BG*, etenim sestans assumpta fuit totius

circuli

circuli, igitur B*I* nona pars cum ſit ſemiperipheriæ, eius dupla nempe G*I* nona fiet pars totius circuli, cuius poſtea B*I* decima, ac octaua pars fieri conſequenter patet, & habetur propoſitum.

ADNOTATIO.

NON igitur ſua legitima conſtructione caruerat enneagonus, quod non à multo tempore doctiſſimus Petrus Herigonius ad notas in tertium tomum conſtanter negat in ipſo tractatu, ſcilicet de muniendis arcibus, mihi fol. 340, 341, & quidem licebat aſſerere pro tunc ignotam fuiſſe effectionem, aut non exhibitam, verum quæcumque ignoramus valde ſumus prooliues in ipſam reiicere diſciplinam, vt vt minime ignoremus perfectionem senſim, & longo poſt tempore ſoleant vniuerſa recipere ſuam. Igitur non modo enneagoni, & omnium imparium polygonorum laterum Geometria habet, & faciliter exhibet, quod verò nos fruſtra ſępe conemur in aſſequtione queſiti, eſt quia à veſtigiis declinamus naturæ rerum, veluti author idem in Algebræ ſupplemento ad quæſtionem quintam propoſitionis 34. mihi pagina 53, vbi ex artis analyſeos hypoteſi conatur ſeptufariam ſecare circuli peripheriam, & in hanc incidens æquationem, ſcilicet.

7 BCC $\simeq$ ACC -- 7BQ in AQQ + 14 BQQ in AQ aſſerit (nec fallit) latus huius compoſiti Algebrici eſſe heptagoni in circulo inſcriptibilis, cuius verba ibidem ſunt.

In hac

„ *In hac æquatione linea radicis A est latus heptagoni in*
„ *circulo inscripti, vnde liquet problema hoc non esse planũ,*
„ *neque hanc æquationem reduci posse ad quadraticam,*

Sed hoc artificiosè compositum geometriæ nihil officit plura ope intellectus comminisci nouimus, quæ natura nõ profert, quis etenim vltra cubum dixerit con cipi, & à parte rei haberi ex illis potestatibus, quę Analystę induxerant? si igitur a binomia radice ars confinxerat solidũ illud, quod ipsa postea nequit resoluere, cur petere á genere planorum, quod non composuit? latus deinde, & heptagoni, & in qualibet alia multitudine figura laterum imparium per sua propriè construit, & ostendit, quod in sequenti erit.

PROBL. VICESIMVM QVINT.

Polygonum regularem quotcumque laterum imparium Geometricè describere.

TAM generalis est detecta à nobis methodus, vt omnibus parium, siue imparium polygonis cõpetat, & ab vna eademq; scaturigine pendeant vniuersi, ponamus in exemplum heptagoni, ac vndecagoni descriptionem.

Primùm imperetur describi heptagonum, exponatur circulus quicumque, cuius sit *K* centrum, & acta diameter *AF*, ad amplitudinem circini arbitrariam (dummodo circunductus non superent designandæ

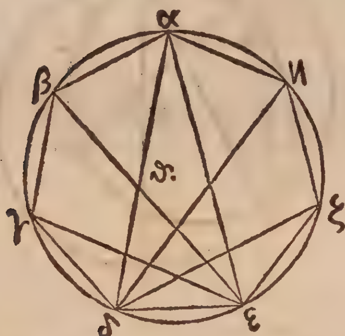
partes

partes ſemicirculum) pro heptagono accipiantur partes tres, & ſemiſſis vnius, vt *AB*, *BC*, *CD* æquales, & *DE* vnius ſemiſſis, deindè connexa *AE*, quæ neque debet æquare diametrum, aut illud ſuperare, vt diximus, completoque circulo circa eãdem *AE*, vt diameter, notetur ſignũ quadrantis puncto *L*, ex quo per primæ partis punctum agatur linea *LBG*, habebitur *G* punctum in ſecundo circulo: Ideò conducta alia EG, primus circulus ſecabitur nouo puncto *H*. Dico Arcum *AH* eſſe ſeptimam partem ſuæ integræ peripheriæ, & ducta corda *AH* latus præcisè heptagoni inſcripti. Etenim ex demonſtratis factæ ſunt ſimiles tres peripheriæ in duobus circulis ſe ſecantibus *AH*, *AG*, & *AG*, *AB*, & in vno eodemque circulo ſimiles habentur, *AH* relata ad *AF*, vt *AB* relata ad *AE*, at *AB* ſit vt 2 ad *AE* 7, ergo & *AH* relata ad *AF* erit vt 2 ad 7, & duplato conſequente erit *AH* 2 ad totam circuli peripheriam comparata, vt 2 ad 14, hoc eſt diuidendo *AH* ſeptima fiet circuli totius pars, quæ circumlata, accuratè præſtabit regularem heptagonum. Ideò factum quod oportuit.



ADNOTATIO PRIMA.

SI circumferentia exposita, in qua formula constructionis est designata, sit propositi circuli ad inscribendum heptagonum, iam res confecta relinquitur, at si diuersus sit circulus, tum analoga erit suscipienda portio, quod per æquales in centro angulos nullo absoluetur negocio, sit illa pars αβ, & heptagonus totus αβγδεζη, ductisque lineis, vt in schemate, factum erit αδ Isoscele triangulũ cuius ad basim angulorum vterque αδ, αεδ erit triplus, ad angulum verticis, quare vna est pars materialis constitutiua heptagonum, ab opposita sua peripheria limitata, vndè ante expletionem figurę inquisita obtineri non poterat anguli determinatio, & quidem vel saltem hisce initiatus doctrinis negare audebit nemo diuersi ordinis esse figura, & angulus; figura sanè altioris est cum spatium claudat, & mensuret, quod angulus non facit, & quia in serie figurarum rectilinearum prima est triangulum, ideò propinquiorem alijs, ipsi angulo, quare cum dixerint authores inquirendum fore triangulum, optimè censuerant, at illud assequi non poterant,



rant abſque eo, quod integra figura, cuius ipſe fuiſſet pars, non reperiretur, Clauius ſcriptor admodum accuratus ad calcem libri quarti elementorum hæc habuit,

„ *Si igitur inuenta fuerit ars, qua iſoſcelia triangula con-*
„ *ſtruantur habentia angulos ad baſim multiplices eorum,*
„ *qui ad vertices ſunt angulorum, quemadmodum Eucli-*
„ *des Iſoſceles fabricauit, habens vtrumque angulorum ad*
„ *baſim duplum anguli ad verticem, facilè in circulo de-*
„ *ſcriberentur figuræ omnes laterum imparium: & ſi arcus*
„ *earum diuidantur bifariam, inſcriberentur quoque*
„ *omnes figuræ parium laterum poſt quadratum, atque*
„ *adeò circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æqua-*
„ *les partes Geometricè diuidetur, quæ res ſummam aſtro-*
„ *nomis afferret vtilitatem; verum hæc ars adhuc ignota*
„ *extitit, &c.*

Huc vſque Clauius cum pluribus, at ignoſcat quæſo venerabilis antiquitas, Euclides poſt inuentionem trianguli iſoſcelis, qui angulos ſuper baſim in dupla ratione ad verticalem haberet, ad effingendum pentagonum, non dixerat neceſſitatem pro alijs figuris imparium laterum, vt haberentur eiusmodi triangula (at ſecundum quandam analogiam authores deinceps vnus poſt alium aſſeruere) etenim homogeneorum refragante lege; ſcilicet oportere congenea comparari, quod in qualibet re ipſa docet natura, at philoſophi ſymbola, & aſymbola communicare nequeunt, hęc ſanè contemplatio nobis viam aperuit, vt ad diuiſionem arcus haberemus recurſum.

N 2 ADNO-

ADNOTATIO SECVNDA.

VNica, & Generalis naturæ methodus exposita est omnibus polygonis competens, & tàm facilis, vt amplius optari nequeat; igitur canonem hìc adnotare præstat, quò ad inquisitam figuram citò ducamur, cuius ordo sic se habet.

Prima omnium figura est Isopleurum pro quo erit in circumferentia expositi circuli sumenda pro amplitudine libera, dũmodo semicirculũ non attingat pars

$1\,\frac{1}{2}$ pro quadrato; sumendæ erunt partes binæ;

$2\,\frac{1}{2}$ pro pentagono

3 pro hexagono

$3\,\frac{1}{2}$ pro heptagono

4 pro octagono

$4\,\frac{1}{2}$ pro enneagono

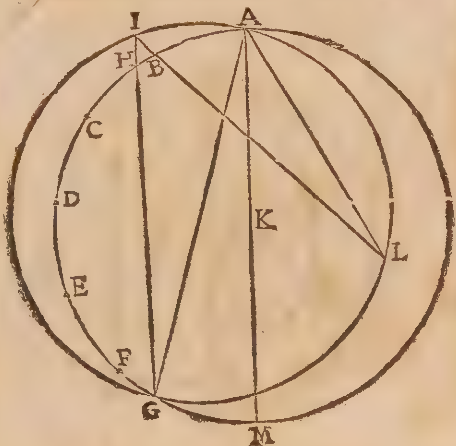
5 pro decagono

$5\,\frac{1}{2}$ pro vndecagono, & sic in infinitũ erit in reliquis progressus, vt pro numero ãgulorũ inquisitę figurę

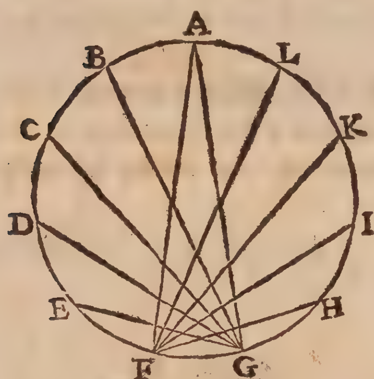
tot

tot ſemipartes in circuli peripheria ſumantur, vt pro polygono laterum 45, vt requirebat Adriani problema, partes ſuſcipiantur (in tàm ampla peripheria, vt non attingant diametrum) 22 cum ſemiſſe vnius; quare in Geometricis præciſionem, quam hactenus non recepit, hac arte modò facilè aſſequetur, & ſic ex ipſa rei natura deſumpta, triangula iſoſcelia exurgunt cum ipſis polygonis, habentia angulos ad baſim in illa ratione multipla, quæ requiritur ad angulum verticis, & hìc coronidis loco lubet vndecagonum deſcribere.

In aliquo expoſito circulo, cuius centrum K diameter *AF* ad circini aperturam arbitrio ſumptam (dũmodo circumducto diametrum non attingat) accipiantur æquales partes $5\frac{1}{2}$ pro numero angulorum, ſcilicet ſiuè laterum inquirendi polygoni, & ſint *AB*, *BC*, *CD*, *DE*. *EF*, & ſemiſſis vnius *FG*, arcus totius *AG*, ſit eius nominis corda, circa quam eat circulus, in quo quadrãs *AL*, deindè ex puncto *L* in ſignum primę aſſũptę partis *B* ducatur linea *LB*, quę porre-



cta arcum secabit secundi circuli in puncto *I*, ad quod ex *G* termino ducatur linea *GI*, & secabitur prior circulus in *H*, nouo puncto. Dico portionem resectam in dato circulo *AH* esse partem vndecuplam totius, & si in coæquali referatur, & lineæ agantur, erit expleta figura *ABCDEFGHIKL* vndecagona, & triangulum *AFG* ad basim angulos habere in ratione multipla ad angulum verticis, vt *S* ad *I*, & quia constructio est generalis, diuersa nõ erit effectio in omnibus alijs, demonstratioque iam ex alijs supra habetur eadem, nam similes sũt portiones ĩ circulis diuersis *AH*, *AI*, & pariter *AI*, *AB*, & in vno, eodẽque circulo similes fiunt

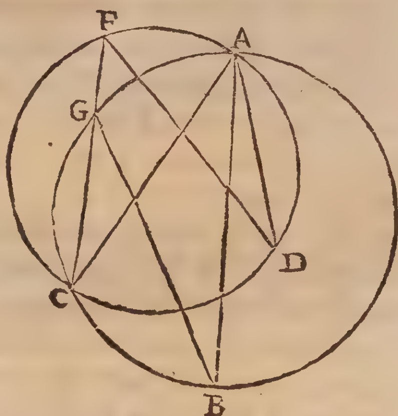


AH respectu semicirculi, vt *AB* respectu portionis *AG*, & ideò vt *AB* ad *AG* est 2. ad 11, sic *AH* ad *AF*, vt 2 ad 11; quare duplato consequente erit vt 2 ad 22, ita *AH* ad circulum integrum, scilicet in ratione sub vndecupla, quod erat faciendum.

ADNO-

ADNOTATIO TERTIA.

NON tantum hac methodo regularium polygonorum inueniuntur latera, verum etiam portiones similes inæqualium circulorum habentur, quia in circulo ABC; si ducta fuerit corda quæcumque AC, quę alterius circuli diameter euadat, & assumpto *D* quadrantis puncto in semicirculo; qui intra datum colligitur, ducta quęlibet linea *DF*, & iungendo puncta FC secabitur datus circulus prior in *G*. Dico quod similes fiunt portiones AF, AG inęqualium circulorum, & facilè patet, nam iunctis BG, *DA*, erunt anguli ABG, ACG, æquales, quia eidem insistunt peripheriæ, pariter, & anguli ADF, ACF æquantur; eadem ratione ergo æquales euadunt diuersorum circulorum anguli ABG, ACF; Ideòque similes portiones sunt AG, AF, & aliquota, vel aliquanta sit AG, eadem in suo circulo fiet AF, quod fuit intentum.



ADNO-

ADNOTATIO QVARTA.

NObilitas amplitudinis eiusmodi effectionis postulare videtur, vt in silentium non relinquamus quicquid de polygonis locorum imparium senserint authores, & ne catalogus texatur, vnum pro omnibus selegimus celeberrimum nempè Kepplerum, qui præ ceteris mordicus defenderat heptagoni descriptionem ex numero fuisse impossibilium, & adeò constanter opinionem hanc tenuerat, vt prorsus è genere scibilium auulserat, nempè consequenter suis confictis definitionibus, ac conceptionibus, ea protulisse ex proprij ingenij feracitate potius, quam rei naturam indagasset, & si alibi præcipuè, & ex proposito in volumine harmonices libro primo capitulis 45, & 46 patet studuerit, aptari magis suis Idæis, quam realitati naturæ, quare ad hanc deuenerat sententiam, quod heptagoni descriptio fuisset ex inscibilibus, quia non præcesserat effingendi possibilitas, ideò pro dignitate quæstionis requiritur hìc non nulla eius verba excribi, quæ locis citatis habentur mihi pag. 38.

„ *Concludimus igitur analyses istas cossicas alienas esse à*
„ *præsenti contemplatione, nec vllum constituere gradum*
„ *scientiæ, cum ijs comparabilem, quos explicauimus in*
„ *superioribus.*

„ *Illud autem sunt obiter monendi metaphysici, occa-*
„ *sione huius cossæ, considerent, si quid hinc transumere*
„ *possint ad illius axiomatis explicationem, cum non en-*
„ *tis, nullæ dicuntur esse conditiones, nullæ proprietates,*

nam

„ *nam hìc quidem versamur nos in entibus scientialibus,*
„ *& rectè pronunciamus, quod latus septanguli sit ex non*
„ *entibus, puta scientialibus, quum enim sit impossibilis*
„ *eius formalis descriptio, neque igitur sciri potest à mente*
„ *humana, cum scientiæ impossibilitatem præcedat ipsa de-*
„ *scriptionis possibilitas, neque à mente omniscia actu sim-*
„ *plici æterno, quia sua natura ex inscibilibus est, & ta-*
„ *men huius non entis scientialis sunt aliquæ proprietates*
„ *scientiales, tanquam entia conditionalia, si enim esset*
„ *septangulum descriptum circulo, laterum eius proportio*
„ *tales haberet adfectiones.*

Sic ibidem author, qui insuper paulo antea fol. nimirum 34. L. C sequentia dictauerat.

„ *Itaque nullum vnquam regulare septāgulum à quoquam*
„ *constructum est sciente, & volente, & ex proposito*
„ *agente, sed bene fortuitò construi posset, & tamen igno-*
„ *rari necesse est, sit nè constructum an non?*

Non nulla sanè iste author obiecerat Analystis vera, vt pote ad latera figurarum explicandum nihil conferre per gradus scalares æqualitatem indicari, quum actu præcisè neque geometricè, neque per approximationem arithmeticè exhiberi nequeant, at deinceps in sequelam principiorum á se fabricatis, neque latus heptagoni describi, & consimilium figurarum, non iuxta naturæ thesim susceperat, nam ex ideis sibi conceptis ad possibilitatem, vel impossibilitatem rei naturaliter, fallaciter est argumentatus; idcircò delusus deuenerat in minimè tolleranda absurda, vt eiusmodi descriptiones etiam fuerint im-

O possibi-

poſſibiles menti omniſciæ actu, nedum humanæ, & tamen fortaſſe vno potuerant fuiſſe contextu dictata (quod ex propinquitate loci argui licet) conceſſerat quidem caſui, aut ſorti, quod omniſcię ſubduxerat menti, at viri alioquin doctiſſimi, ac præclariſſimi patiantur manes in rectam à diuerticulo ſemitam reduci, nos ordine ſcientiæ à rebus quidem recipimus ſcientias, & tunc ad veram rerum pertingimus naturam, cum earum cauſas agnoſcimus, effectus vnde incepimus producere, non quando noſtras confictas idæas aſſequimur non abludere ab hypoteſibus. Deſcriptio heptagoni geometricum eſt opus, vt imparium omnium aliorum polygonorum, & tanquam à ſubalternante ſi ab ea accipiat aliquid muſica ſubalternata arithmeticæ, potius quam Geometriæ nihil in reliquis turbari poteſt, quare inquiſita à Kepplero in magnitudinibus, vt muſicæ cum ſuis idęis inſeruiret inter arcana geometriæ non penetrauit, deſcriptio heptagoni poſſibilis adeſt, & tàm parabilis, vt mirum ſit á nemine fuiſſe detecta, cæterum ingenium feraciſſimum Keppleri plurimi ſemper faciendum cenſuimus, & quippè ad mixtionem rerum naturalium cum matheſi valdè fuerat propenſum, & amplius quam ad rigorem mathematum tolerandum, ideò aliquando meretur, vt cum cenſura admittantur quædam eius aſſerta.

PRO-

PROBL. VICESIMVMSEXT.

Heptagoni altera delineatio Analystis fortaße oportuna.

SIt circulus, cuius A centrum, BC diameter, & in C erigatur CE perpendicularis, eritque contingens circulum; ex altero verò extremo B diametri sit inscripta BD latus vnum trianguli ęquilateri, quod productum occurret ipsi *CE*, sit in puncto *E* (necessitas concursus euidentior fit, quàm vt probari sit opus) deindè *BE* secetur æqualiter in *F*, ex quo puncto erigatur eidem normalis *F-G*, secabitur circuli peripheria in *G* pũcto, quo aio fieri quesitum, scilicet iũcta *CG*, fieri corda dupli arcus heptagoni, adeò vt diuisa peripheria *CG* bifariã in K, erit *CK* arcus subseptuplus totius criculi, seu ducta corda *CK* latus vnum quęsiti heptagoni: si igitur initio facto à puncto *C* septies circunducatur amplitudo ipsius *CG*, vt *GH*, *HI*, *I*K, K*L*, *LM*, *MC*, in secunda circulatione regredietur ad idem *C* punctum, & quia ex æqualibus subtensis, etiam an-

 guli

guli, quos ſuſtinent eſſe æquales manifeſtum eſt, quare peripheria, quę debetur angulo *GCM*, hoc eſt angulo ad *C*, comprehenſa eſt

	duabus rectis	*GH*, *LM* dempto	arcu *HL*
ad *I*,	duabus	*HG*, K*L*	arcu *LG*
ad *M*,	duabus	*L*K, *CG*	arcn *GK*
ad *H*,	duabus	*GC*, *IK*	arcu *KC*
ad *L*,	duabus	K*I*, *MC*	arcu *CI*
ad *G*,	duabus	*CM*, *HI*	arcu *IM*
ad *K*,	duabus	*IH*,*LM*	arcu *MK*,

& quia omnes arcus ſublati per ſuas portiones *HL*, *LG*, *G*K, K*C*, *CI*, *IM*, *MH* vnam reſtituunt pręciſe circulationem, ergo & reliqui ſimul *LG*, *HM*: *LH*, *G*K: *GL*, K*C*: *GK*, *CI*: K*C*, *IM*: *CI*, *MH*: *IM*, *HL* alteram conficiunt circulationem accuratè, quod fieri non poſſet niſi ad idem punctum, à quo ſumpſiſſent circulandi initium, perfectè regrederetur, quare Polygonus erit ordinatus heptagonus, quod inquiſitum fuerat.

ADNOTATIO PRIMA.

APparet igitur Geometras pro conſtructione heptagoni latus habuiſſe paratum, quod oppoſitum Analyſtis contigit, qui ſanè quæſitum tanquam conceſſum ſupponunt, ſub ignota magnitudine *IN*, deindè ex nota circuli ſemidiametro, vt prima, & IN, vt ſecunda ſeriem inſtituunt octo proportionalium ſub gradibus parodicis ad poteſtatem, cuius exempla

empla adduximus ſupra ad 18 Problema, in adnotatione 3, & facta operatione nobis exhibent hanc adfectam magnitudinem ſolidam

7 *N* — 14 *C* † 7 *QC* — 1 *QQC*

vt ex ea eruatur latus, ſiuè *IN* pro ipſo heptagoni latere, & ſecundum analyſeos præcepta optimè concludunt, ſed rem ad ſuum non deducunt ſcopum, etenim geometricè ex illo artificio nondum conſtitit haberi, ſed tantum latitaſſe quæſitum, nec ſuffragio arithmetico ad accuratum eſt deuenire, erat ideò negocium geometris commendandum, & à ſuis fontibus præcisè deducendum; præterea Analyſtę incidunt inter amphibola, cum pro multitudine adfectionis, etiam tot latera poſſe explicari, vt in ſuperiori erunt quatuor, continuatio poſtea pro ſeriè linearum proportionalium, & ſi per ſigna parodica *N*. *Q*, *C* &c. videatur aſcenſus, re vera eſt deſcenſus indicatus ijſdemmet ſignis, vt periti optimè norunt.

ADNOTATIO SECVNDA.

AT quotieſcumque magnitudo ſecundo loco poſita in ſerie proportionalium ſub *IN* ignoto latere excedit primam, tunc ſequentes augeri eſt ordinatum, verum caſu vtroque gradus parodici indicent ſuum cuiuſcumque locum, at de his alias, quod ſanè in præmiſſo problemate erit non iniucundum, illud nempè abſolui liceat vſque ad inuentionem lateris heptagoni, nulla circini facta variatione, vt quiuis ex

ſaltem

ſaltem initiatis cōmodè aduertere, ac experiri poterit. Igitur inuento *G* puncto, & ducta *GB* per biſectionem, aut arcus *CG*, aut anguli *CBG* habetur per *BD* lineam ipſa *CD* ſeptima circuli pars, quæ ſepties circumducta heptagonus explebitur accuratiſſimè: agantur lineæ *CG*, *CH*, *CI*, *CK*, *CL*, quæ cum tangente *EF* conſtituent numero angulos ſeptem *ECD*, *DCG*, *GCH*, *HCI*, *ICK*, *KCL*, *LCF*, omnes quidem æquales, ſunt namque ad contingentem *EF* cum ſecantibus anguli *ECD*, *CBD*, nec non *FCL*, *LBC* in coalternis portionibus æquales, & reliqui circumſtantes ſimiliter ob ſubſentas omnes pares fiunt, ſed ſi libeat faciamus periculum in numeris, etiamſi ad geometricam præciſionem attingere nequeant ſinuum tabulæ, vt conſtat ob numeros irrationales, ſit itaque arcus ſeptimæ partis

CD, 51. 25. 42 $\frac{6}{7}$ eiuſuè corda 86776

CG, 102. 51. 25 $\frac{5}{7}$ eiuſuè corda 156364

BD, 128. 34. 17 $\frac{1}{7}$ eiuſuè corda 180194

omnia ad radium 100000, nec ampliore indigemus, & ponamus inquirendum arcum, cui ſubtendit corda *BG*, igitur in quadrilatero *CD GB* duo diametri inter ſe ducti conſtituent (ex lemmate Ptolemaico, à plu-

ribus

ribus euulgatum) rectangulum æquale ei, quod ſub lateribus *BC*, & *DG* fiet rectangulo, vna cum reliquo ſub *CD*, & *BG* ſimul ſumptis, at rectangulum ſub diametris *DB*, *CG* eſt 28175854616
& factum ſub *BC*, *DC* notis eſt 17355200000

Igitur reliquũ ęquatur ei ſub *CD*, *BG* 10820654616
& adplicatum ipſi *DC* 86776 exiet in quoto 124696
pro cordaBG,cuius ĩquirimus arcũ,&reperitur 77.8.33
deberi partes, at ipſi *CG* congruę fuerant
partes 102.51.25 $\frac{5}{7}$

vt ſimul à duobus rectis deficiant vno 179.59.59 tantum ſecundorum minutum, ob ineuitabilem tabularum defectum.

ADNOTATIO TERTIA.

HEptagoni indicati latus ab analyſtis ſub ſuis gryphis, nos vero exhibuimus, & quia per duplicem circulationem magnitudo *CG* redit ad idem punctum, à quo ſumpſit exordium, vt autem afferatur circulus, cuius fiat *CG* ſeptima pars ſimplex, nullo negocio aſſequetur, ſi ad amplitudinem ſemidiametri *BD* ſcribatur, erit illud quęſitum efficiens, nam vt *DC* ad *CG*, ſic ſe habet *AB* ad *BD*, & ſi intelligatur

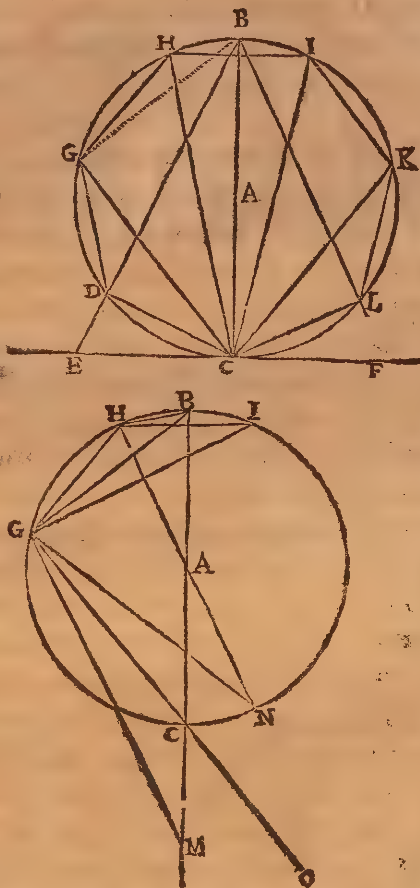
acta

acta *AD* sũt duo triãgula *CDG*, *BAD* Isoſcelia, & ſimilia.

Porrò vt duplici circumuolutione *CG* ſepties, ſic *BG* triplici, per quater, & decies complentur circuli, etenim *CG*; $102^{0}.\ 51^{\prime}.\ 25^{\prime\prime}\ \frac{5}{7}$ ſepties ducta efficit 720. partes, Ita *BG* $77.8.34\ \frac{2}{7}$ quater decies ducta cumulat partes 1080; nempe tres circulos, oporteat exhibere circulum, in quo *BG* quater decies ſumpta illum expleat accuratè, replicetur: datus circulus (ad vitandam linearum confuſionem), & in eo ponantur, vt prius puncta *G*, *H*, *I*, & agantur *GH*, *GB*, *GI*, & ad angulos rectos ſuper *HG* ipſa *GN*, vt ſuper *GI*. ipſa *GM*, quę cum diametro educta conueniant in puncto *M*. Dico ſi fiat circulus ex ſemidiametro *BM*, illum eſſe quęſitum, & in eo prçcisè *BG* quater, & decies comprehendi, quod ſic oſtendi poterit, cum enim anguli *HGB*, *BGI* ſint ęquales, nec non *HGB*, *HCB*, quia ſuper æquales, aut eandem ſint peripheriam, anguli vero *BGC*, *HGN* in ſemicirculis recti, vt *MGI*, rectus ex fabrica, & prætcrea anguli *GHC*, *GBC* æquales, erunt triangula *HGC*, BGM æquiangula: recto enim HGN additus eſt HGC, angulus æqualis *HGB*, qui recto CGB appoſitus, erunt facti ex recto, & æquali HGC, BGM duo æquales anguli, & æquales oſtendimus GHC, GBC,

quare

quare in dictis triangulis *GHC*, & *GBM* reliqui anguli ad complementum duorum rectorum *GCH*, *GMB* æquales fiunt, & ideò similia sunt triangula, & erit *GH* ad *HC*, ita *GB* ad *BM*, ſed *GH* pro duabus circulationibus diametrum vnius habuit *GN*, & *GB* pro tribus aſſumit *BM*, ſeu mauis *GO* coęqualem in angulo recto *OGB*, vt erat *NGH*, & totum hoc opus breuiter excuſabitur, ſi fiat, vt *HG* ad *HC*, ita *GB* ad *GO*, ſeu *BM*, circulos poſtea illos non deſcribimus, quum à quolibet poſſint exhiberi, quare factum erit, quod volebamus.

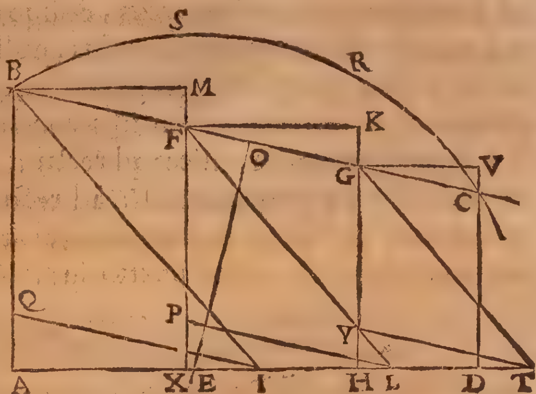


PROBL. VICESIMVMSEPT.

Medias quotcumq; lineas inter extremas in vna ratione inſerere datas, ſeu rationem quamcumq; datam æqualiter in partes ſecare imperatas.

SInt datæ *AB*, *CD* extremæ, quæ in earundem diſtantia alternè ſumpta ponantur ſuper iacentem *AB* lineam ad rectos angulos, & copulentur *BC* puncta, per lineam biſectam in *O*, ex quo puncto eleuetur perpendicularis occurrens *AD* in puncto *E*, quod erit punctum quadrantis circuli euntis circa *BC*, ex quo portio peripheriæ ſcripta ſuper *BC*, erit arcus ſectus á linea *BC*, & deinde diuiſo arcu pro numero mediarum ſuplè pro duabus medijs trifariam, pro tribus quadrifariam, & ita pro ſubſequentibus eodem ordine, & à punctis diuiſionum in caſu duarum mediarum duobus, demittãtur perpendiculares, quæ ſeſecabunt cum *BC*, ſit in *FG*. Aio quod portiones *FX*, *GH* ſunt inquiſitæ mediæ, & ratio continua quatuor *AB*, *XF*, *HG*, *DC* inuenta haberi, quod ita oſtendetur. Ponatur *AI* æqualis *XF*, & *XL* æqualis *HG*, vt adhuc *HT* aqualis *DC*, & aliæ quantum fuerit opus, poſtea iungantur *BI*, *FL*, *GT*, à punctis verò *I*, *L*, *T* agantur *IQ*, *LP*, *TY* æquidiſtantes lineæ *BC*, & erunt inter ſe: & ſimiliter à punctis *B*, *F*, *G* ipſi *AD* aliæ fiant æquidiſtantes *BM*, *FK*, *GV*, quę erunt & inter ſe, at quia in parallelas *BM*, *AI* incidens linea *BI* angulos efficit coalternos æquales

MBI, *BIA*, veluti eadem *BI* in parallelas *BF*, *QI* incidens alios coalternos æquales *FBI*, *QIB*, & ſunt iſti illorum portiones, quæ ſublatæ relinquunt æquales *MBF*, *QIA* angulos, & ita in cęteris conſequẽtes, pręterea in parallelas *AB*, *XF*, *HG*, *DC* incidẽs *BC* facit angulos *ABF*, *XFG*, *HGC* æquales, à quibus ſublati ęquales *FBI*, *GFL*, *CGT* erunt reſidui *ABI*, *XFL*, *HGT* ęquales in rectangulis triangulis, ergo & reliqui, quare ęquiangula ſunt triangula *BAI*, *FXL*, *GHT*, &c. Ideo homologa in ratione erunt latera, hoc eſt *AB* ad *AI*, vt *XF* ad *XI*, ſed *AI*, *XF* vna, & eadem linea ſunt, ergo tres *AB*, *XF*, *XI*, ſeu GH proportionales, & duabus poſtremis *XF*, *HG* relicta prima ſunt in ratione, vt *XL* ad *HT*, quare & *HG*, *XL* ſunt eadem linea, & erunt in analogia tres aliæ *XF*, *HG*, *CD*, in qua fuerat *AB* ad *XF*, ergo aſſumpta rurſus *AB*, quatuor erunt in proportione *AB*, *XF*, HG, *DC* continuę, quod effici imperatum fuerat.



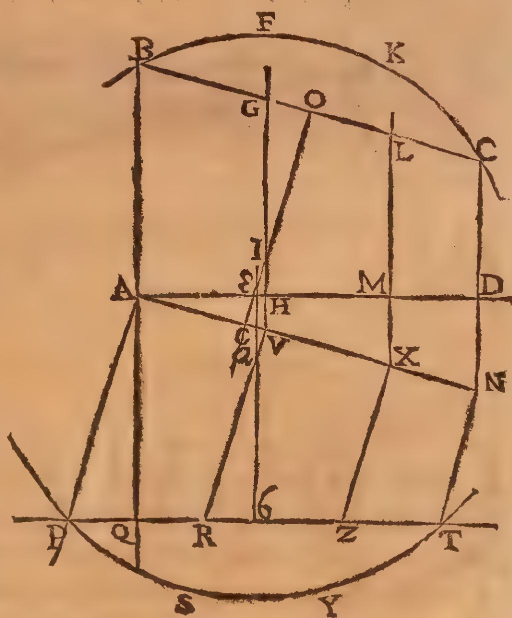
ADNOTATIO PRIMA.

QVod dicimus de duabus erit idem pro tribus, quatuor, & alijs, itaque negocium deuoluitur ad diuisionem anguli siue arcus, & siquidem proponatur angulus determinatus secandus, nulla habita ratione ad medias proportionales præter ea, quę supra ostensa sunt, eius dati anguli semissis constituatur in linea *OE*, complementum scilicet ad rectum ponendo ad *C*, vt *OCI*, sit complementum *OIC* ad rectum, vt totus angulus fiat *CIB* datus, factoque in *I* centro, delineabitur comprehensa anguli portio inter *BC* deinceps secanda in partes imperatas, & apparet, quod cẽtra portionũ arcuum, siue angulorũ infra iacentem lineam, & supra, semper tamen in datam positionem rectam *OE* occurrere contingũt, in *AD* tantum in angulo recto, quo casu obtinebimus inter extrema pcoportionales, & tunc non tantum pro-

proportio erit *AB* ad *ED*, vt A*E* ad *CD*, ſed æqualitas permutata inter iacentem lineam, atque extremarum aggregatum, vt in conſtructione fuerat indicatum, quumque ex alio, & alio centro ſcriberentur portiones, ſemper noua triſectio ſuccedet pro mutatione angulorum, centra denique infra aut ſupra *AD* indicant adgregatum extremarum maius, aut minus ipſa iacente linea, & in ipſa quadrantis punctum, vt conſtat, quare & proportionales, & anguli ſectionum exhibentur ex prædictis.

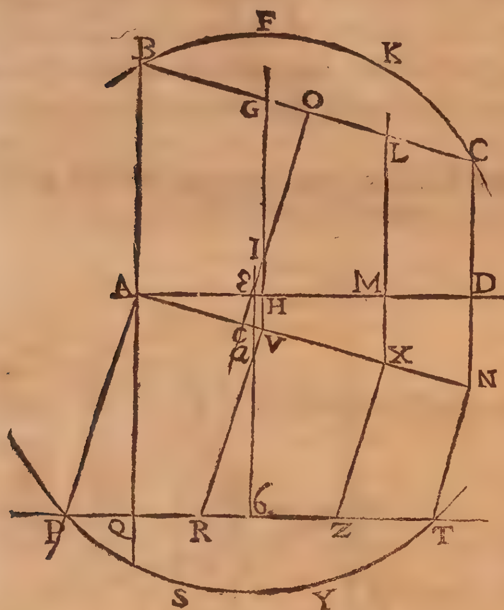
ADNOTATIO SECVNDA.

VT igitur in problemate aſſertum cui. dentius ſe oſtendat, ex *A* pũcto agatur *AN* æquidiſtans *BC*, & continuatæ GH, LM, CD ſuper ipsã cadant in punctis V, *X*, N, conſtat quod omnes erunt ipſi A B æquales, & v-



na ra-

na ratio conuersa inter partes *GH*, *LM*, *CD* erit cum adiunctis *DN*, *MX*, *HV*, porrò super eandem *AN* ex prædictis punctis eleuentur normales *AP*, *VR*, *XZ*, *NT* prioribus æquales, iunctaque *PT* indubium est per extrema transire mediarum, vtque in *BC* erat *OI*ε ad angulos rectos, similiter ex dimidia *PT* in puncto *b* altera erecta, in eaq; eligatur punctum analogicum *a*, ex quo describatur arcus *PST*, qui similis fiet arcui *BFC*,



illud verò punctum *a* assequetur si dicatur *BC* ad *PT*, ita OI ad aliud, siue Oε ad aliud, & fient *a*, *c* congrua punctis Iε, non enim æquales erunt cordæ BC, PT; ob AD, ac AN impares, sed nulla turbatio occurret in effectione, quia nititur similitudine; duo postea

DAN

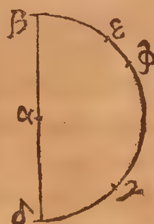
DAN, *PAQ* anguli æquales ſunt, vt rectorum reſidui, & ſunt illi met adhibiti in ordinatione demõſtrationis, qui ad reliquos terminos intelligi queunt extenſi, quare tam *F*,K per *HG*, *ML*, quam per *VR*, *XZ* habebuntur S, Y puncta, & conſtat diuiſio eſſe in partes vtrobique pares.

PROBL. VICESIMVM OCT.

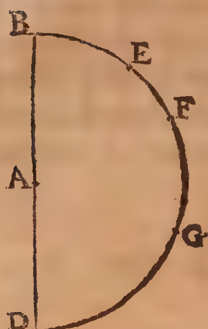
Portiones inæqualium circulorum diſſimiles in eadem ſecare analogia.

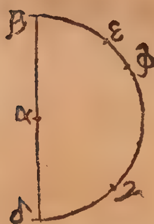
FOrtaſsè videbitur effectio huius cum problemate 19 coincidere, at aliter proponi non iniucundum ſupponimus, neq; inutile, ſi enim propoſitus angulus, ſiuè arcus ſecandus ponatur βγ, vt in aliqua fiat analogia, nempè vt ſe habet *BE* ad *EG* perficiam ſemicirculum *BGD*, hunc vero oportet ſecare, ex præmiſſis in *F*, adeò vt fiat *BF*, ad *FD*, vt *DE* ad *EG*, deindè expleto ſemicirculo altero βγδ, eius peripheria iterum ſecanda erit, ea ratione in φ, vt ſemicirculus prior ſecuimus in *F*, quod facillimũ erit per ęqua-





li





litatem angulorum in centro, deindè vt ſe habet βφ ad φδ, ita ſe habeat βε ad εγ, ex ijs pariter, quę ſupra oſtẽſis. Nã ex æqualitate, ſiue ex communi animi conceptione, quę eidem ratione cõueniunt, eſſe inter ſe ęquales, ipſa dicta ratio, erat namque vt *BE* ad *EG*, ſic *BF* ad *FD*, & vt *BF* ad *FD*, ita βφ ad φδ, & iterum βφ ad φδ ſe habet, vt βε ad εγ, ex æquo igitur ſequitur eſſe βε ad εγ, vt *BE* ad *EG*, quod erat faciendum, quæ relata ab arcubus ad angulos, erunt & anguli in eadem ratione, vti proponebatur.

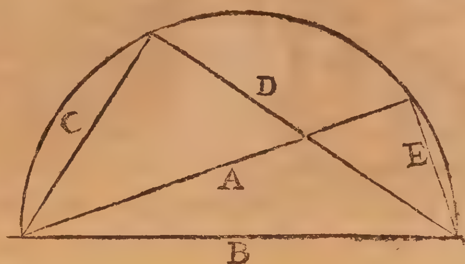
PROBL. VICESIMVM NONVM.

Angulum planum per artem analyticam ſecare trifariam.

EX opere geometrico adhibitis rectis tantum lineis, deinde per ſemicirculi peripheriam, & diametrum eductam, poſtremò per arcus circuli, vt per genus proximius ſupra, illud idem abſoluimus, & demonſtrauimus, at quia indicauimus quo vſque Analyſtæ ſuo artificio progredi queant, ſciendum eſt, quod

ſi pro

ſi pro angulo ita trifariam ſecando, proponantur trianguli rectanguli omnia numero latera, etiam quãtitatem numericam laterum ſecundi trianguli licebit Analyſtæ afferre, adeò vt angulus ſecundi triens fiat anguli aſsũpti in primo triangulo, hoc eſt ſi nota dentur rectanguli trianguli omnia latera, vt *B* hypotenuſa ſit



1 7 5 7 6 Perpendiculum verò, ſit *D*
1 6 2 8 0 Et baſis, vt latus reliquo *C*
6 6 2 4 Omnia ſic *BDC* trianguli latera, ex doctrina ſectionum angularium, & aſſumendo ſyſtaticum problema ab Anderſono operi Vietæo de recognitione, & emẽdatione in fine ſubnexũ, vt angulus ſub *B*, & *C* triſecetur, & fiat angulus ſub *B*, & *A* triens prioris, conſtituetur ſecundũ triangulũ *BAE*, & res ad hanc deuoluetur æquationẽ, vt cubus ſub dupla baſe ſecundi trianguli, multatus ſolido ſub quadrato hypothenuſæ in eãdem ſecundi baſim, æquetur ſolido ſub quadrato hypothenuſæ in duplum trianguli primi baſim, quæ quidẽ æqualitas ſub ſpeciebus, vt inuenta eſt ſic proponitur

2 A C — BQ 3 in A ═ *B*Q in C2,

& vulgo ex numeris datis ita exprimitur

1 *C* -- 9 2 6 7 4 7 3 2 8 *N* ═ 4 0 9 2 5 1 6 2 0 0 4 4 8,
Q

& niſi

& nisi darentur primi trianguli *BDC* latera, & communis fieret hypothenusa *B* ad inuentionem per numeros, ars non procederet, verum geometricum non turbat, cui relinquit operi, vt linearum A, & E magnitudines limitentur, at quia cubus adfici potest tùm à latere, tùm à quadrato pro vtroq; casu exempla afferimus, & in hoc priore adfectio est sub latere, & quia cubus adfectionis negatè multitudinem excedit extractio lateris, seu 1 *N* directè fieri licet, ordinetur igitur, vt potestas solitaria ex vna parte maneat, & quod negatum est sub latere in aliam adfirmatè transeat,

1 *C* = 40925162004 48 † 926747328, *N*

Latus seu 1 N	✠ 92 40	674 925	732 162	8 004	48	
3	278 27	024	198	4		
27 9	9 48	267 949	473 360	28 404	48	
	18	534	946	56)		

6 7 4 8 4 3 0 6 9 6 4 4 8

Latus 2	54 3	6 8				
	57	68				
9		926 804	747 306	328 964	48	

32	3	706	989	312)	
1024	13	511	296	276	48
3072 96 4.	12	288 153	) 6) 64)		
	12	442	24		
	1	92 069	674 056	732 276	8 48)) 2)
324 324		370	698	931	
104976	1	439	755	207 .)	68 .
314928 972 4.	1	259 1	712 555	)) 2) 64))	
	1	261	267	84	
3244 3244		9 178	267 487	473 367	28 68 .)
10523536		74	139	786	24)
31570608		252	627	153	92
9732 Latus. 8.		252	564 62	864 284 5	) 8) 12)
32448.		252	627	153	92

Latus inuentum *32448* eſt *A* duplum, quare ſimplum *A* quæſitũ fiet *16224*, & *E* reſiduũ à quadrato ipſius *B* hypothenuſę erit *676*, & trianguli ſecundi *BAE* duo latera *BA* comprehendunt trientem anguli propoſiti ſub lineis numero datis *BC*, ideò factum quod oportuit.

EXEMPLVM SECVNDVM.

Contingit aliquando ob negationis vitium, quod non tantum adficiatur poteſtas, at ipſa adficiat ſolidum, ex inde oritur ambiguitas lateris, quam vt caueat Analyſta congruum adhibit remedium, & in hoc caſu per πρότον ἐσχατόν, vt ipſe inuentor docuit in opere de recognitione, ac emendatione æquationum, quo artificio latus negatum in adfirmatum tranſit quadratum, & homogenum comparationis in ſuum quadratum eleuatur, eductum deindè latus adplicandum venit propoſitum ſolidum, vt parabolæ ſemiſſis, quæſita fiat ſecundi trianguli baſis. Proponatur igitur

1 *C* -- 1 *4480427 N* ⊏ *7993195704*

vt lateris ambiguitas declinetur, ſic iterum proponendũ

1 *C* ✠ *14480427* ⊏ *63891177562444055616*

& quia adfectio eſt ſub quadrato magis operoſa fit effectio ob plana expletionum, & erit vt ſequitur.

✠	14 63	480 891	427 177	562	444	055	616
Latus. 1.	1 14	480	) 427	lat. pri.	cubus pri in quadr.	mi lateris adfect.	))aufer.)
plan.exple-	tionis. 2 48	896 144 410	085 804 750	4 ,à co- 27 562	efficiente coefficiēs reliquum	in dupl. la lōgitudo resoluen-	teris pr. di
9	2 2 11 26	7 43 729 729 064	145 768	))) 87) 6)	tripl. q.pr tripl.latus cubus à à q.lateris a latere 2.	lateris in prim.in q. latere se-- secū.in co in plan ex	secundū secundi cundo efficiētem pletionis
	43	652	914	47	subtrah. à	resoluen-	do
	4	550 1 757	256 448 836	226 042 092	7 444)	055	616
7	3	758 27 851 70	1 93 343 793 954	582 092	)))) 3)		
	4	709	120	674	3		
0.		5 48	705 715	288 144 418	238 804 144	0 27 055	016

		8	149	890	0	)	
			2	895	90	)	
7					343	)	
		39	937	017	666	0)	
			7	095	409	23)	
						)	
		48	096	899	318	23)	
			57	073	154	977	80
				1	448	042	7
0.			618	518	825	825	16
			104	858	779	230	0)
					478	880	10)
							729)
			513	65 8	394	800	20)
				1	172	914	587)

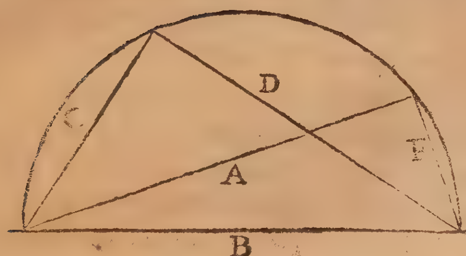
Latus integrum
1970709 = 6185188258 25616

collecta omnium subtrahendorum summa æqualis reliquo resoluendo, quare erutum adfecti cubi sub quadrato latus sit 1970709, quod adplicatum proposito solido

$\frac{7993195704}{1970709}$ erit quotus, seu parabola

4056 cuius semissis
2028 erit simplum *A* quæsitum pro base secundi triangu-
845 li, & perpendiculum eiusdem *E*, vt differentia quadratorum *B*, *A*, ex quo in hoc secundo exemplo ponatur *B*

Hypo-



Hypothenusa 2197
D perpẽdiculũ 2035
& C basis 828
atque incidens in æquatione, vt in priore exẽplo, $A2\ C -- B\ Q\ 3$ in $A = B\ Q$ in $C2$, cubus etiam adfici potest adfectione duplici, vt duo sunt scalares gradus, at simul adfectio eiusmodi nihil ad trisectionem anguli in triangulo conferre potest, constat itaque quo vsque analyticum pertingat opus, nec quicquam quod geometricum sit conturbat, eidem relinquens suum illibatum munus, & quia quos vidimus authores pro trisectione anguli, ac duarum mediarum inter totidem extremas, agnoscunt assumptum suffragium haud esse geometricum culpandi non veniunt, at Ioannes Moltherus in quodam libello de duplicatione cubi edito Francfurti 1619, ac Principi Mauritio nuncupato plura pollicebatur, vt geometricè illa eadem, & alia supplere, at demum cum Vietæo coincidit postulato, & mirum quippe quàm lepidè illud dissimulet, ait namque in historica narratione de duplicatione cubi mihi fol. 26.

„ *Subtilissimus Vieta nihil quod censuram sustineret vena-*
„ *tus est; Clauius in Geometria practica aliquot antiquo-*
„ *rum geometrarum producit mechanemata: Verè, ac geo-*
„ *metricè duas medias proportionales ad eam vsque diem*

inuen-

" *inuentas disertè negat, &c.* & paulo infra nẽpe fo. 27.
" *hoc posterius (nempe mediarum duarum) nullatenus*
" *nec ab illis, nec à recentioribus geometricè potuit obiri.*
" *At nos rem istam exploratæ per plurima secula difficulta-*
" *tis, in qua mortalium ingeniosissimi hæsitarunt, ita ex-*
" *peditam, facilem, obuiam, parabilem, promptamque*
" *dudum animaduertimus, vt quia hasce postulati legitimi*
" *conditiones obtinet, Postulatus sit proxima, meritòque*
" *annumeranda, adeò vt nequaquam ceu problema conten-*
" *tiosum anxiam constructionem, ac demonstrationem re-*
" *quirat, sed tanquam principium per se manifestum, seù*
" *contenta sit explicatione, qua adhibita à quolibet capi, &*
" *assensum mereri possit, & hisce præmissis initio operis ait.*
" *Postuletur, duabus lineis, punctoque in eodem plano*
" *situ datis, vt è puncto isto linea recta applicetur, cuius*
" *portio à lineis illis intersecta alteri rectæ longitudine da-*
" *tæ sit æqualis.*

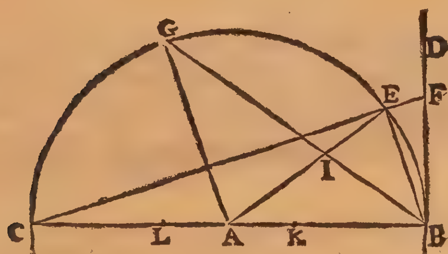
Quid igitur Author iste hisce ampullatis verbis inędificet non video, nisi quod dum Vietæum repellit postulatum, quod facit suum, suamet suo iudicio condemnat, vt à geometriæ numero aliena, interim cum cæteris, & plusquam aliis reijciendus author iste, & vt cum Vieta clarissimo cepimus cũ eodem claudatur, at si geometriæ aliquid hactenus detractum æqui Censores nouerint pro eorum ingenuitate speramus vnicuique suum restitui pronuntiaturi oportere.

PRO-

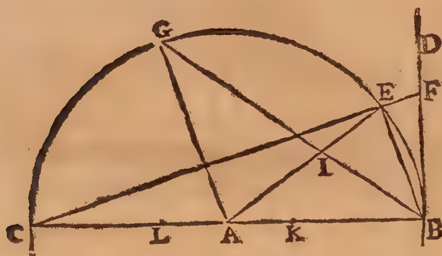
PROBLEMA TRICESIMVM

Arcus pentagoni congruus habetur determinatus ante Iſoſcelis trianguli conditionarij conſtructionem, ſcilicet in quo angulus vteruis ad baſim eſt ad reliquum verticis in ratione dupla.

SIT circulus, cuius diameter *BC*, quæ duobus punctis ſecetur æqualiter trifariam, vt in *L*, k, & vna partium ſit *B K*, hæc ponatur in linea *BD*, quæ tāgat in *B* circulū, & *BF* ęqualis ipſi *BK*, deinde ex reliquo extremo diametri *C* agatur *CF*, hæc ſecabit peripheriam in *E* puncto, iungatur *AE*, poſtea angulo *BAE*, *ABI* angulus conſtruatur æqualis, & porrecta *BI* dabit in peripheria punctum *G*. Dico quod arcus *CG* ſit totius circuli quintans. Iungantur *AG*, *BE*, quoniam duo anguli ad *A*, & *B* in triangulo *ABI* æquales facti ſunt ſupra baſim, iſoſceles ſit triangulum, & alter angulorum eſt in peripheria, alter verò in centro circuli, ſequitur ex conuerſa propoſitione 20 libri, 3 arcus oppoſiti eſſe in ratione dupla, ſed tàm *CAG* angulus, quám *AIG* angulus, dupli ſunt anguli *ABI*, nam



rum alter est in centro, alter verò externus in isoscele, ergo æquales sunt anguli *CAG*, *AIG*, qui detracti è duobus rectis, relinquentur *BAG*, *BIA* æquales, & ideò isoscelia, & similia sunt eadem triangula, & si quidem ab æqualibus *BAG*, *BIA* angulis æquales anguli *BAI*, *BGA* subtrahi concipiantur, relinquentur equales *GAI*, *GIA* anguli supra basim *AI*, & fiet isosceles triangulum *AGI*, ergo *GAI* æquabitur angulo *CAG*, quare peripheria *CGE* secta erit bifariam in *G* puncto, & angulus *BAE* subduplus tùm *CAG*, tùm *GAE* angulis, semicirculi igitur peripheria in quinque portiones distributa erit, quarum vna *BE*, & eius dupla *CG*, erit quinta pars totius peripheriæ circuli, inuenta ante omnem constitutionem isoscelis conditionarij pro quæsito Polygono laterum imparium, ab antiquis requisiti.



ADNOTATIO PRIMA.

POterat quidem inuento puncto *E* aliter reliquũ absolui, vel ex duplo arcu *BE*, haberi statim punctum *G*, vel è centro acta *AG*, æquidistanti *BE* rectæ, at libuit per æqualitatem angulorum supra semidiametrum

trum incidere, vt forma, quæ alijs polygonis á pentagono fit communis, & præter duo iam agnita isoscelia similia *BAG*, *BIA*, duo sunt alia ad angulum communem commissa, nempè *AGI*, *IBE*, nam anguli *AGI* vnius æquatur angulo *IBE* alterius, quia *ABE* bifariam secatur, & reliquus *GAI* reliquo *BEI* æquatur: sunt igitur homologa similium latera triangulorum, hoc est *BG*, *BA*, *BI* proportionalia, vel *BG*, *GI*, *BI*, ergo in puncto I secatur *BG* media, ac extrema ratione, similiter in analogia sunt *AE*, *AI*, *IE*, quare & *AE* secatur in eodem *I* puncto media iterum, ac extrema ratione, & constat ante constructionem conditionarij ttianguli isoscelis existere polygonum quinque lateribus ordinatum.

ADNOTATIO SECVNDA.

EVclides quippè methodum inscribendi pentagonum ordinatum tradidit dependenter ab isoscele iam dicto, & Ptolomeus in Almagesto ex sectione analogica semidiametri illud idem ordinauit, ex indè authores cæteri crediderant pro polygonis imparium laterum, inquiri oportere conditionaria isoscelia, sed nec exhibita à nemine fuerant, nec expectanda vlterius; quia vt in Physicis contingere nouimus, ex mixtione diuersarum specierum vltra primam, haud admittit natura deinceps proles, sic in Geometricis quasi ex compositione rerum diuersæ speciei, haud licet vltra pentagoni structuram per mixtionem linearum, & an-

gulorum secare peripheriam de genere curui, & ideò ex genere proprio superius, & hìc factum conspicitur.

PROBL. TRICESIMVMPRIM.

Arcus heptagoni congruus habetur determinatus ante isosceles conditionarij constructionem, nempè in quo angulus verticis est ad reliquos in ratione subtripla.

SIT circulus cuius diameter *BC*, & hęc æqualiter secetur, tribus adhibitis punctis, quadrifariam: sit deinde tangens circulum *AD*, in eaque ponatur *BF*, vni partium nempe *BK* æqualis, & à centro *A* conducta *AF*, secabitur peripheria in *E*, postea angulo *BAE* construatur ãgulus *ABI* æqualis, & porrecta *BI* dabit in peripheria punctum *G*. Dico arcum *CG*, arcum esse heptagoni congruum circulo ordinati. Secetur bifariam arcus *GE* puncto *L*, & ducantur *AG*, *AL*, *BL*, *BE*, & etiam si lubet *CE*, fiet angulus *EBD* ad tangentem ęqualis *BCE* in segmento alterno, seu *AEC*, (hac scilicet quantitate anguli supra *BE* in isoscele minuuntur à recto) & anguli *ABE*,

AEB in tripla oſtendentur eſſe ratione ad angulum verticis *BAE*, quoniam anguli *BAI*, *ABI* facti ſunt æquales, oppoſiti arcus eſſe in ratione dupla *CG* ad BE ſupra fuit demonſtratum, & ABL iſoſceles, quum ſit anguli ALB, ABL ęquales, ſicuti angulus LAE in centro, æquatur angulo GBE, quia iſte ſuper duplam inſiſtit peripheriam, ergo duo anguli ABL, G*B*E euadunt æquales, à quibus portio GBL communis ſublata, relinquuntur anguli CBG, LBE æquales, quare & arcus quibus inſiſtũt CG, LE ęquales; at G*L*, & *LE* ſunt ęquales, ergo quilibet arcus *CG*, *GL*, *LE* ſit duplus ad arcum BE, hoc eſt arcus BE ſeptima fiet ſemicirculi portio, ſeu angulus in centro BAE, ſubduplus cuiuſulibet angulorum *CAG*, *GAL*, *LAE*, & ęqualis ſit angulis CBG, *GBL*, LBF, quare ante conſtructionem huius trianguli conditionarij A*B*E, & natura, & tẽpore determinata habetur portio *CG* in circulo pro heptagono oportuna, vt fuit quęſitum.

ADNOTATIO PRIMA.

SEquitur ex oſtenſis quod AG, *B*L ſint ęquidiſtantes, etenim æquales euadunt anguli AL*B*, LAE, & iſoſcelia triangula AOL, O*BE*, non tamen ſimilia, ſed ABE, EBO ſimilia, ſicuti A*B*E, ABH ſimilia, & æqualia, nam iterum ſimilia fiunt ABG, IBA, & quia anguli CAG, AIG ſunt æquales, quum ad A*B*I quilibet ſit in ratione dupla, ergo ſublati ex duobus rectis, reliqui BAG, *B*IA ęquales ſunt, quare triangula A*B*G, ABI ſimilia ſunt, præter quam quod ad baſes BG,

& BA

& *BA* erant anguli pares, & ideo homologa fiunt latera *BG*, *BA*, *BI*, & in triangulis *AHI*, *BIE*, & ſimilitudo, & qualitas adeſt, vt ex angulis patet, ideò *HI*, *IE*, *AH*, *EB* ęquantur, & baſes *AI*, *IB* erant pares, igitur æqualibus æqualia additis *BH* æquatur *AE*, & iſoſcelia *ABH*, *ABE*, angulus nempe *AHB* triplus fit anguli *ABH*, quod rectè conſequitur, quum poſſit duos *HLB*, *HBL* internos, hoc eſt *ABL*, & *HBL*, quare erit, vt *G*B ad *BH*, ita *BH* ad *BI*, vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam, & reliqua *GH* ad *HI*, & non nulla alia aſſimilari cum conicis ſectionibus.

ADNOTATIO SECVNDA.

AD Punctum igitur K ſi eleuaretur perpendicularis tranſibit per *I* punctum, & erit portio æquilateri trianguli circulo inſcribendi, ad hanc lineam ex A centro requirebat Vieta in 8 libro Variorum capite 7. quod inclinaretur recta hac ratione, vt *IE* æqualis efficeretur cordæ EB, nam ibidem aſſumpſerat ſub examine tres methodos pro heptagono effingendo, exhibitas ab Illuſtri quondam mathematico, & eius cenſura fuit, eſſe

Primam geometricam, ſed veræ tantum proximam, non etiam accuratam, alteram veram, & accuratam, ſed non Geometricam.

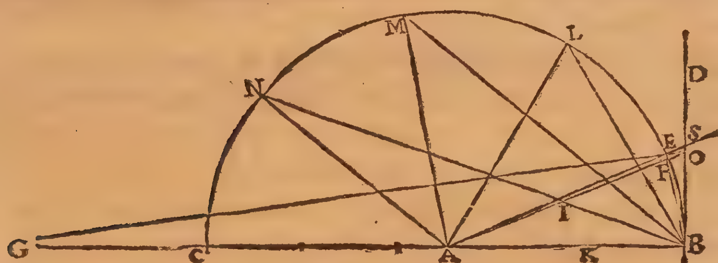
Tertiam Geometricam, ſed ἀσυλλόγιστον
& omnes vt par erat reprobauerat, in ſecunda tamen forma, quæ mechanico tantum hærebat duo ſtabilierat, ſuo

rat ſuo more elegantiſſima theoremata, ad illa lectorẽ remittimus, & ex inuenta æqualitate inclinatę *IE* ad *E*B concludebat heptagonum ſubſiſtere ordinatum, verum, & ęqualitas eadem eſt quid poſterius ipſo heptagono, quo prius à nobis multiplici ratione exhibito duo illa theoremata omni pede procedent.

PROBL. TRICESIMVMSEC.

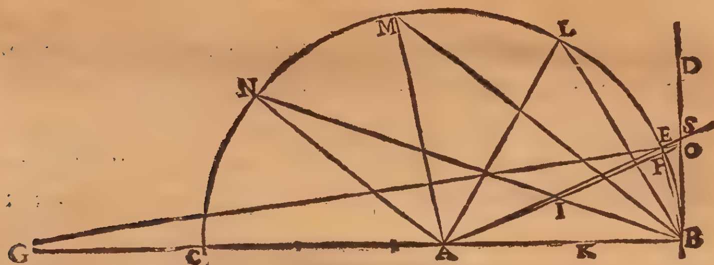
Arcus in circulo congruus enneagono, habetur ante inuentionem ſui trianguli conditionarij.

IN circulo cuius B*C* diameter, hæc quatuor punctis ęqualiter diſtantibus in quinque dirimatur



portiones, quarum vna ſit BK, quę vt ſupra in tangentem BD ponatur, vt ęqualis BK ſit BS, & iungendo *A*S ex centro ſecabitur peripheria primum in *E*, & producta diametro ad ſemiſſem eius *CG*, agatur *GE* linea, quę vlterius ſecabit tangentem in puncto *O*, ex quo iterum

iterum ad *A* centrum conducta linea *AO* ſecabitur ſecundò peripheria in *F*, deinde angulo B*AF* conſtruatur angulus AB*I*, & protracta B*I* ſecabitur peripheria in N. Dico quod arcus *C N* erit nona pars accuratè totius circumferentię, & ſic demonſtratur. Iungantur A,N, cui æquidiſtet BM, & arcus *MF* ſecetur bifariam in *L*, & alię ducantur AM, AL, *BL*, *BF*: igitur anguli NAM, AM*B* alterni ſunt ęquales, & AN*B*, NBM



æquales, vt æquales CAN, C*B*M in centro, & ad arcum, quare tres CAN, NAM, MAL anguli ęquantur, ſimiliter & huic poſtremò ęqualis *LAE*; ergo dupli omnes eiuſdem anguli *BAF* fiunt, & tota ſemicirculi peripheria diſtributa habetur in nouē portiones, quarum vna eſt *BF*, & totius circumferentiæ nona pars fit eius dupla *CN*. Idcircò ante conditionarium Iſoſceles pro enneagono eius oportunum latus habetur natura, & tempore, quod erat intentum.

ADNO-

ADNOTATIO.

1 POterat etiam, & punctum *F* reperiri absque eo quod produceretur diameter in *G*, at forma assumpta, & commodior visa fuit, reique magis propria, nam pro figuræ primæ scilicet Isopleuri arcu, vtitur sectione diametri in centro, & semissis reflectitur intra, vt sextans fiat, reliquus verò ad semicirculum est quæsitus arcus.

2 Deinde dum secatur diameter duobus punctis trifariam æqualiter ad tangentem operatio prouocat, & limitatur arcus pẽtagoni à reliquo diametri extremo

3 Postea pro tertia figura imparium, nempè heptagono, secatur ipsa diameter tribus punctis quadrifariam, & cum tangente arcus determinatur a semidiametro ex centro.

4 Igitur quod tàm arduum censebatur, tàm facilè, & secundum naturam reperiri contingit. Si verò ad vlteriora, hac methodo progredi lubeat non vnica, sed replicata sectione, vt in enneagono factum est, posset expediri, & tunc quatuor punctis dirimetur diameter æqualiter, nempe quinque portiones, at vlterius etiam excedere licebit, & si satis implexa effectio sortiretur, nobis satfuit demonstrasse in omni polygono imparium laterum prius attingi arcus lateri competens, quã reperiatur conditionarium isosceles, quod illa deinceps inquirere superfluum videatur, ac inutile, cum aliàs haberi queant, vt ostensum fuit.

Soluentes itaque Perge magni nuncupati Geo-

metræ manes; poſt ampliſſima vaſti pelagi perluſtrata iam litora; ſibiq; plurima, ac prætioſa admodum oblata, adhuc neque alumnos excitare quieſcentes; ad anguſti Tynheni ripas dum conuergerent proras, contigit *ITER* proſpexiſſe *REGIVM*, quo pauca hæc exorta haud indignabundæ ſibi onerari adnuerant.

FINIS.

INCLINATIONVM GEOMETRIÆ PARERGON

EODEM AVTHORE.



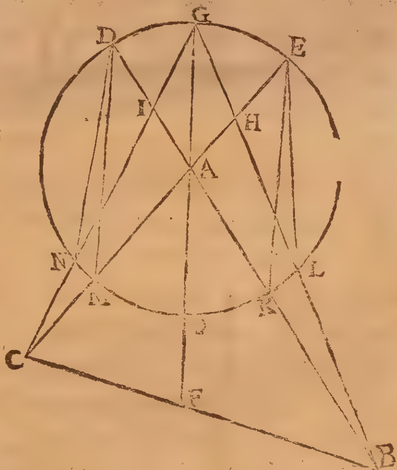
INGENVO LECTORI S.

IN primæuo exortu suo, cuiusuè nec parum indigens opusculum de reflexionis puncto agnoscebatur, industria caruit obstetrice, meritò igitur sibi postulabat reflecti, quod aliquando consensimus, & curiosè prolixa rescindere consilium fuit, vt reliqua ferè alia methodo construere, ac demonstrare, & pro illo vt supponimus fungi criticis sublatum officio, ita nec immemores, in hoc exerceri Parergo translatum, vbi tria opticorum potissima è mechanicis ad Geometriam problemata inuenies reuocata, vtinam onus aliquis susciperet totum illud nobile repurgandi, Geometriæ vè vinduandi opus. Vale.

PROBLEMA PRIMVM.

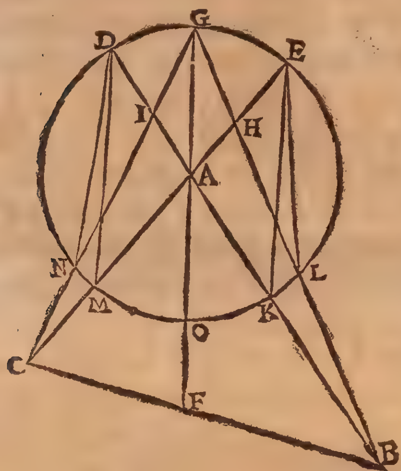
Dato circulo, & duobus punctis extra inæqualiter à centro remotis, duas inclinare lineas ad angulum in peripheria, quem bifariam diameter dirimat.

SIT circulus circa *A* centrum puncta *B*, *C*, ducantur per centrum *BAD*, *CAE*, & connexa *BC* ita ſecetur in *F*, vt ſit *BF* ad *FC*, ſic *BD* ad *CE*, & ducta per centrum *FAG*. Dico punctum *G* efficere quæſitum, hoc eſt iunctis *BG*, *CG* angulum *BGC* biſecare linea diametri *GAF*, & ex præſcriptis in opticis, dicetur *BG* incidentiæ linea, *CG* reflexionis, autècontra, vt angulus BGC reflexus, & punctũ G reflexionis. Iungantur *MD*, *ND*, K*E*, *LE*, vtq; anguli, qui ad *BC* ſunt extra reuocentur ad circulum, arcus ſuſcipiãtur *MN*, KL, ſiue pro eis *MDN*, KEL anguli cõpetẽtes, hiſce paratis cõſiderentur triangula *BAH*, *CAI* ad angulum compoſita communem *BAH* ſeu *CAI*, erunt *AHB*, *ABH* internis æquales ſimul duobus *AIC*, *ACI* cum ambo



ęquen-

ęquentur vni externo *BAC*, ergo exceſſus idem fiet inter *AHB*, & *AIC*, qui inter *ACI*, & *ABH*: at angulus *AHB* æquiualet in alio *HEL* triangulo duobus internis *HEL*, *HLE*, & angulus *AIC* æquiualet in alio *IDN* triangulo duobus internis *IDN*, *IND*; quare idē exceſſus fiet duorum *HEL*, *HLE* angulorum ſimul, ſupra angulos *IDN*, *IND* ſimul, quam anguli *ACI* ſupra angulum *ABH*, ſeu arcus *GE* ſupra *DG* arcum, qui à prædictis angulis in oppoſita occupátur peripheria, aut ſi mauis acceptis ex aduerſo *MO*, & *OK* tantundem differre oportebit, quantum anguli adgregatum *MEL* † *ELG*, ſeu arcus *ML* † *MO* excedunt ſupra angulos *KDN* † *DNG*, ſeu arcus *KN* † *DG*, ideſt *KN* † *OK*, & ſublatis vtrobique ęqualibus *MO*, *OK* repetitis, idem erit exceſſus *ML* ſupra *NK*, qui viciſſim *GE* ſupra *DG*, & ablato communi *MK* erit exceſſus idem inter *GE*, & *DG*, ſeu *MO*, & *OK*, qui inter *KL*, & *MN*, quare erunt quatuor termini, bini, ac bini in arithmetica analogia, nimirum *MO* primus, *OK* ſecundus, *KL* tertius, & *MN* quartus, qui ſi compa-



rentur

rentur, prima cum poſtrema, magnitudo eadem conſtituetur, quam ſi comparentur ſecunda cum tertia, ideò additis arcubus *MO*, & *ON*, & alijs K*O*, & KL, id eſt duo arcus *NO*, & *OL* fient æquales, ergo & totus angulus *LGN*, id eſt *BGC* diſtinctus per æquales á diametro *GAF*, & fit *G* punctum reflexionis, & angulus *BGC* reflexus, & duo *GN*, *GL* portiones ęquales.

SCHOLIVM.

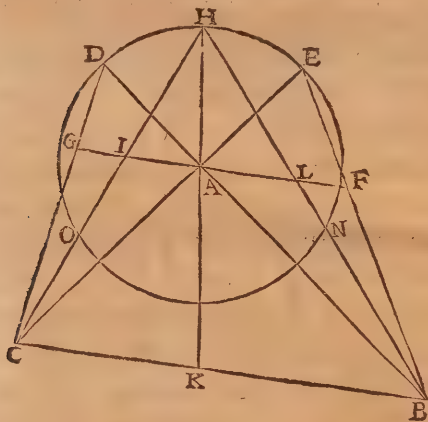
NEC poterit in caua peripheria aliud punctum reperiri præter *G*, verùm poſſibile eſt tailter haberi ex diſpoſitione ſitus punctorum, vt non biſecetur angulus reflexus à diametro, ſed ab altera linearum, & tunc portiones de circulo *GL*, *GN* fient inæquales, vt infra dicetur: præterea in quibusdam caſibus duo licebit inuenire reflexionis puncta, vnum ſcilicet in latere peripheriæ, quod mixtus habeatur pro caua, & conuexa, vt in vltimo dicetur problemate: alterum vero, vt factum *EH*; & ne præmiſſa forma cum arithmetica analogia alicui minus arrideat, ſuccedat conſtructio altera ex pluribus alias exhibitis, à quibus nunc declinamus, cum pauca abundent. Sit itaque.

PRO-

PROBLEMA SECVNDVM

Datis ijſdem circulo, & duobus punctis extra idem præſtare.

AGantur per centrum *BAD*, *CAE*, & iungantur *CD*, *BE*, etiam *BC* connexa, ſecetur in K, vt fiat *BK* ad K*C*, ita *BD* ad *CE*, deinde per centrum *A* ducatur *FG* ęquidiſtans ipſi *BC*, & ducta K*AH*. Dico *H* pũcto in peripheria effici quęſitũ, nimirum connexis *BH*, *CH*, ipſe angulus *BHC* dirimi à diametro *H*K bifariã; quoniam enim eſt, vt *B*K, ad K*C*, ita *FA* ad *AG*, hoc eſt *LA*, ad *AI* ob æquidiſtantiam *LI* à baſe trianguli *BC*, erit permutã-



do, vt *B*k ad *LA*, ita *C*k ad *AI*, ſeu vt *BH* ad *HL*, ita *CH* ad *HI*, & vt *B*K ad *BH*, ita *AL* ad *LH*, pariter vt k*C* ad *CH*, ita *AI* ad *IH*, & ideò conuertendo, ac permutando *HL*, ad *HI*, vt *AL* ad *AI*, quare in triangulo *LHI*, laterum ratio *LH* ad *HI*, & in eadem analogia cum baſeos ſegmentis *L*A ad *AI*, ergo & angulus *LHI*

ſeu

ſeu *BHC* biſectus eſt à diametro *HAK*, quod fieri oportuit.

PROBLEMA TERTIVM.

Datis circulo, & duobus punctis intra ambitum in ſitu, vbi linea connectens per centrum non tranſeat, idem efficere

SIT circulus circa *A* centrum, & duo puncta *B*, *C* intra, in diametris diuerſis, agantur *BAD*, *CAE*, & centro facto in *B*, diſtantia *CE*, & viciſſim centro in *C*, diſtantia *BD* portiones circulorum ſe mutuo ſecent in *F* puncto; è quo per centrum ſi agatur FAG: Dico quod *G* punctum erit quæſitum, nempe ductis *BG*, *CG*, angulum quem faciunt *BGC* biſecare diameter *GAM*, quod ita lubet oſtendere. Ducatur K*AO*, & compleatur *ECL*, porrò ſi aſſumatur triangulum *GCI*, in quo angulus externus *GIE*, & ab eodem auferatur alter internorũ, puta *GCI*, relinquetur alter *CGI*; ſed vice angulorum ſuſcipiantur competentes arcus, id eſt pro *GIE*, ſeu verticali *BIC*



eſt arcus *LK* (quod patet ſi iungeretur *LG*.) & pro angulo *GCI* eſt arcus *GE*, ſeu *LM*, qui deductus ex *LK* relinquetur *MK* pro arcu determinante magnitudinem reliqui anguli *CGI*, ſeu *HGK*, ita vt angulus in centro reſpondens arcui *MK* fiat æqualis K*GH* angulo in peripheria, ergo *MA*k duplus ſit anguli *AH*k, quod eſt verum in externo Iſoſceles *AG*K,

Deindè pergamus in eodem triangulo *CGI* aliud latus productum, erit angulus externus *ECH*, á quo ſi alter internorum *CIG* ſit ablatus, & alter rurſus *CGI* relinquetur, ideò recurrentes ad arcus congruos, erit *GOL* arcus pro angulo *CIG*, ſeu ex aduerſo arcus *MAE*, qui ſubductus de arcu *EMH* congruo ad angulum *ECH*, erit reliquus arcus *MH* competens reliquo angulo *CGI*, iſte in peripheria, & *HAM* competens *MH* in centro; quare æquales fiunt *HAM*, & *HGK*, ſiue *HAM* externus in iſoſcele *HAG*; ſed fuerat *MA*K in centro æqualis *HG* K, modo *HM* æqualis eidem *HG*K: ſequitur igitur K*M*, *MH* eſſe pares, & angulus *BGC* biſectus à diametro *GA*. quare *G* punctum ſit reflexionis, vt quæſitum fuerat.

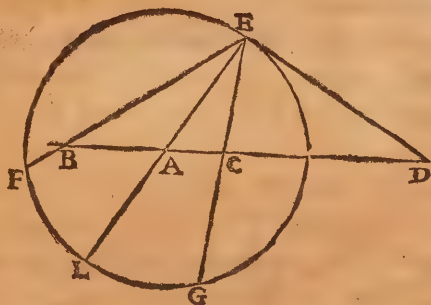
SCHO-

SCHOLIVM PRIMVM.

VT igitur nouã eiuſmodi ratiocinandi, ſed geometrica formam minus aliquis audeat non probare, infra problemate octauo, vbi eadem conſtructione vtemur, alia argumentabimur methodo, vtque ſequentia per occurrentes caſus melius explicentur, neceſſe erit aliundè non nulla hic ſubnectere mutuata, & pro vno ſymptomate ſit.

SCHOLIVM SECVNDVM.

SI duo puncta intra in vnam conſiſtant diametrũ, & quæſitum ſit idem reperire punctum reflexionis, hoc iam ſolutum habetur apud Vitellionem propoſitione 17 libri 8, & apud Cõmãdinum in commẽtarijs collectionum Pappi ad propoſitionem 57 libri 6, qui authores ſic oſtendunt. In circulo ſit linea *BC* per centrum *A*, & quæ ratio *BA* ad *AC*, ita fiat *BD* ad *DC* additam, & à puncto *D* ſit ducta *DE* tangens circulum. Aio punctum *E* eſſe quęſitum: ducatur *AE* diameter & erit angulus *AED* re-



ctus, deindè iunctis *EBF*, *ECG* sunt duo anguli *GEL*, & *FEL* æquales, hoc est à diametro bisectus est angulus *BEC*, & fit *E* reflexionis punctum, & ad integram perceptionem huius effectionis pertinent duo sequentia lemmata.

LEMMA PRIMVM.

DAtæ lineæ vno puncto sectæ, addere portionem, vt fiat tota, & addita, ad additam, ita ratio partium, nimirum *AB* secta sit in *C*, & eidem apponatur *CD*, vt sit eadem analogia *AC* ad *CB*, quæ aucta tota *AD* ad ipsam *BD*, facillima res est; fiat *AE* differentia partium, ponendo *CB*, *EC* æquales, & vt *AE* ad minorem *EC*, ita fiat tota data *AB* ad quartam *BD*, erit quæsitam, nam à compositione argumentando erit *AC* ad *CB*, ita *AD* ad *DB*.

A C B D

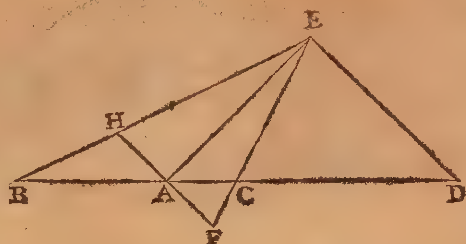
E

LEMMA SECVNDVM.

SI linea secta fuerit duobus punctis, vt *BD* in *A*, & *C*, & sit *A* ad *C*, ita *BD* ad *DC*, & à punctis *A*,*D* inclinentur lineæ *AE*, *ED* ad angulum rectum, vt *AED*, deindè ad idem punctum iungantur etiam *BE*, *EC*, ostendit Commandinus ad propositionem 52. libri 6. in Commentarijs Pappi Collectionum, quod duo

anguli

anguli *BEA*, *CEA* ſunt æquales. Agatur per *A* punctum linea *FAH* æquidiſtans *DE*, & concurrat cum producta *EC* in *F*, erit vterque angulus ad lineam *EA* deinceps rectus ob rectũ *AED*, & cum ſit ex hypotheſi vt *BD* ad *DC*, ita *BA* ad *AC*, erit permutando *BD* ad *BA*, vt *DC* ad *CA*, verum vt *DC* ad *CA* (ob ſimilia triangula *DCE*, *ACF*) ita *DE* ad *FA*, & vt *DB* ad *BA*, ita (ob eandem rationem) *DE* ad *AH*, quare eadem ratio erit *DE* ad *AF*, quæ *DE* ad *AH*; ergo æquales ſunt *FA*, *AH*, quibus addita communis *AE*, duorum triangulorum latera duo *FA*, *AE*, & *AH*, *AE* æqualia habentur, & continent æquales nempe rectos angulos; igitur penitus æqualia ſunt illa duo triangula *EAF*, *EAH*, & angulus *FEH* diuiditur bifariam per lineam *AE*, quod erat demonſtrandum.

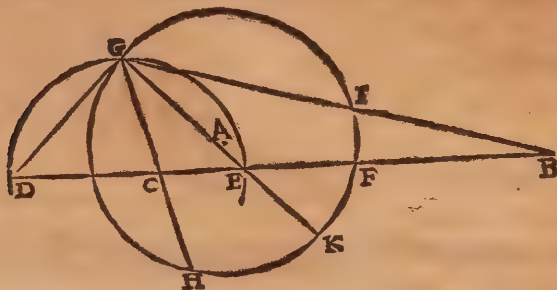


PROBLEMA QVARTVM.

Dato circulo, & punctis, altero intra, altero extra, vt iungens linea non tranſeat per centrum, inuenire punctum reflexionis.

Sint

SInt punctum *B* extra, *C* vero intra circulum, & *BC* non eat per centrum, secetur bifariam pars in circulo in *E* puncto, deindè fiat vt *BE* ad *EC*, ita



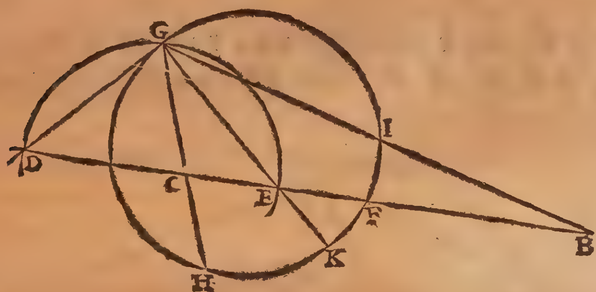
BD ad *DC*, & semicirculus scribatur super *DE* secans datum in *G*, ad quod si inclinentur *CG*, *BG* constituentur æquales anguli *BGE*, *CGE*, vt in secundo ostensum est lemmate, quare *G* reflexionis erit punctum, & angulus *BGH* reflexus bisecatur à diametro, & constat propositum.

SCHOLIVM.

VT classici opticorum Authores, mechanico vsi fuere auxilio ad determinandum in sphærali punctum reflexionis, nihil illis in mentem subierat in quibusdam casibus duo ab ijsdem datis positione punctis, obiecti scilicet & potentiæ haberi posse puncta reflexionis, quos casus infra sumus explicaturi, quod vt

vt nouum ac iucundum fore confidimus.

Cæterum continget aliquando haberi reflexionis punctum, at angulus reflexus non à diametro biſecari, in quo caſu inæquales portiones abſcindentur de



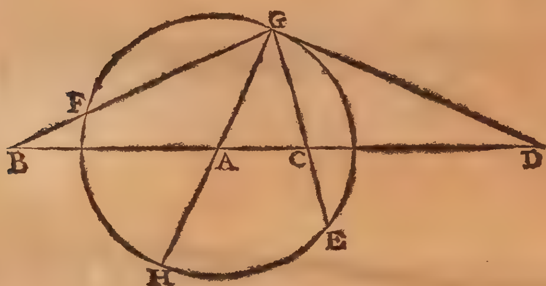
circulo, vt in præmiſſo problemate ſi pars lineæ *BC*, quæ in circulo occupatur non diuidatur (vt in *E*) bifariam, & fiat *BE* ad *EC*, ita *BD* ad *DC*, facto deindè ſuper *DE* ſemicirculo, & ductis *DG*, *EG* conſtituetur angulus *DGE* rectus, & porrectis *CG*, *BG* etiam anguli *HG*K, K*GB* pares euadent ex demonſtratis lemmate ſecundo, verum lineæ in circulo inæquales erunt *GI*, *GH*, quia diameter non eſt linea *G*K angulum reflexum biſecans, quare latius patet inuentio puncti reflexionis, quam ratio reſcindendi à punctis poſitione datis portiones de circulo æquales, quæ perpetuo á diametro biſecari angulum exigit reflexũ.

PRO-

PROBLEMA QVINTVM.

Datis iisdem, & linea iungens transeat per centrum, idem præstare.

HOc quippè perfacile est, nam ex ostensis, si fiat *BA* ad *AC*, ita *BD* ad *DC*, & tangat



DG in puncto *G* circulum, productis namque *BG* *CG* lineis, ac diameter *GH*, palam fit ex citato lemmate secundo, quod anguli *BGA*, *CGA* sint pares, & vt supra reliqua consequentur.

PROBLEMA SEXTVM.

Datis circulo, & punctis, quorum altero sit in peripheria circuli, altero verò extra, lineaque iungens transeat per centrum, idem efficere.

SIT *B* punctum extra, *C* in peripheria, & ex hypothesi cum transeat *BC* per A centrum, secetur diameter *CF* in puncto *E*, vt fiat *C E* ad *EF*, ita *CB* ad *BF*, & portio *FE* aptetur circulo in *FD*; porrò linea ex *B* per D dabit in peripheria punctũ G, & hoc aio, efficere quæsitum. Iungantur CG, HC, HD, & quoniam anguli CGH, CDH æquales sunt, & æquales DCG, DHG, nec non alij ad vertices, plus quam similia erunt triangula HOD, COG, sicuti duo alia HOC, DOG, ideo homologa latera erunt in eadem ratione, nempè *HO* ad OD, vt CO ad OG, & iterum HO ad OC, vt DO ad OG, & permutando *HO* ad DO, vt *OC* ad OG, ergo æquales erunt DO, & *OC*, & super diametrum GH ab angulis rectis cadentes,

efficientur anguli GHD, GDO, ex 8 ſexti æquales, & ad O recti, vnde anguli GCO, GDO æquales; ergo triangula ſimilia, & æqualia CGO, DGO, punctum G reflexionis, & biſectus angulus BGC reflexus à diametro.

PROBLEMA SEPTIMVM.

Datis iiſdem, & lineà iungens non tranſeat per centrum, idem efficere.

Sint puncta B extra, & C in peripheria, linea vero BC centrum non occupet A, agatur tangens, vel punctum in arcu ſignetur D, & pars DE comprehenſæ peripherię ſecetur per æqualia in *F*; per quod punctũ ſi ex *B* agatur linea, ſignabit *G* in peripheria, quo fieri quęſitum ſic oſtendetur. Iungantur *CG*, *CH*, *CF*, & diameter ducta *GA*, efficientur triangula GCH, GFH, & ſupra oſtendimus, neque hìc eſt opus iterari tám CO, quám OF eſſe mediam inter partes diametri *HOG*, ita vt æquales

les ſint, hoc eſt ſecta ſit bifariam CF à diametro, ergo ad angulos pares, & aſſumpto OG communi, duo latera CO, *O*G duobus lateribus *FO*, *O*G æquantur, & angulos continent æquales, quare baſes CG, GF ſunt æquales, & angulus BGC dirimitur bifariam à diametro, & idcircò eſt reflexus, G vero punctum reflexionis quæſitum.

PROBLEMA OCTAVVM.

Dato circulo, & punctorum altero in peripheria, altero intra, & linea iungens illa per centrum non tranſeat, idem punctum reperire.

SIt B in arcu, C intra ſpatium circuli, agantur per centrum BD, CE lineæ, & diſtantia BD, centro facto in C, & viciſſim diſtantia CE, centro in B duæ ſcribantur circulorum portiones ſe ſecantes in puncto F, ex quo per centrum agatur FAG, erit G punctum quæſitum, & cum conſtructio concurrat cum primo problemate, hìc ali methodo ordinabitur demonſtratio. Sumantur ęquales GC, GK, & connectatur *C*k,



ſieri ad diametrum perpendicularis progreſſu oſtendetur, nam iuncta AK, duo triangula GAC, GAK ſunt ſimilia, & ęqualia, quia ęquātur reſolurę partes ex 12 libri 2 GA, AC quadrata † GAL bis rectangulo, ęquantur *GA*, *A*K quadratis † *GAL* bis eodem, & ſublatis denominatis ęqualibus *GAL* bis rectángulo, & quadrato GA, relinquuntur æqualia quadrata AC, AK, & latera, à quorum quadratis dempto communi AL, relinquuntur quadrata duo CL, LK æqualia; igitur biſecta eſt *CK* ad angulos rectos, & per ęqualia à diametro GAL: ergo angulus LGC æquatur angulo BGL, & fit angulus totalis BGC reflexus, vt punctum G reflexionis, & conſtat propoſitum.



SCHOLIVM.

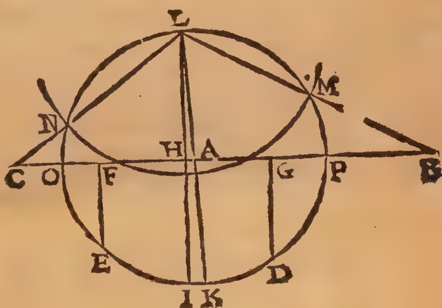
POterat etiam ducta BC ita ſecari in puncto I in ratione BD, ad CE (vel ob faciliorem ſectionem harum aliquotę partes) & per punctum *I*, & centrum in idem incidiſſet punctum *G*, verum conſtructio fit citra dubium per circulorum duorum mutuam ſectionem accuratior.

PRO-

PROBLEMA NONVM.

Dato circulo, & duobus punctis extra, linea vero iungens per centrum transeat, idem punctum inuenire.

SInt B, C extra, intelliguntur semper inæqualiter á centro distare, vt assequatur quęsitum, primo contactus puncta ad eandem partem signentur ex datis, sintque D, & E, à quibus demittantur super BC duę perpendidulares *DG*, EF, deindè comprehēsa *FG* portio secetur in H puncto æqualiter, à quo si linea eleuetur perpēdicularis HL, erit L punctum quesitum. Demittatur per centrum LAK, & iungantur BL, CL, erunt duo BHL, CHL triangula rectangula ad angulum composita, quare eadem differentia est angulorum BLH, & CLH, quę vicissim reliquorum LCH, LBH, Ideò si semissis excessus anguli BLI supra angulum CLI, seu arcus *MPI* supra arcum *NOI* minori apponatur *NI*, scilicet arcus *IK* efficientur arcus *MPK*, et *NOK* equales, seu anguli *BLK*, et CLK, ergo complementa



ad ſemicirculos *LM*, *LN* ęqualia erunt, vnde angulus ſecatur reflexus BLC à diametro ęqualiter, et conſtat propoſitum.

PROBLEMA DECIMVM.

Iiſdem datis, linea vero connectens puncta non tranſeat per centrum, illud idem determinare.

SInt *B*, *C* puncta extra circulum, à quibus tangentes, vt prius, vel puncta in peripheria ſignentur *D*, *E*, deindè in ratione linearum *BD*, *CE* iuncta *BC*,

ſecetur in *F*, à quo puncto ſi eleuetur perpendicularis *FG*, erit in peripheria punctum *G* efficiens quæſitum. porrigatur in *L*, & per centrum agatur *GAH*, fiet arcus *LH*, ſeu angulus *LGH* ſemidifferentia anguli *BGF* ſupra angulum *CGF*, quæ minori addita, æquales redduntur *BGH*, *CGH*; ergo ductę *BG*, *CG* conſtituent angulum biſectum per diametrum, & patet intentũ.

SCHO-

SCHOLIVM.

INcidenter hìc offertur alia ratio construendi triangulum ex datis base, lineaque angulum verticis bisecante, vna cum proportione laterum, diuersa quatenus nobis contigerit videre ab alijs constructum; sit itaque.

PROBLEMA VNDECIMVM.

Sit BC linea pro base, ratio laterum R ad S, & magnitudo lineæ bisecantis angulum verticis G, oporteat triangulum construere,

SEcetur basis *BC* in ratione laterum *R* ad *S* in puncto *A*, in quo facto centro, amplitudine li-

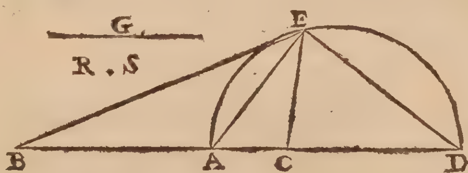
neæ datæ *G* scribatur circulus, deindè á punctis datis extra *B*, *C* agantur lineæ contactus ad eandem partem,

tem, quæ coeant in puncto F, ex quo per centrum ducta ſit *FAH*, porrò arcus *NH* reportetur in *NI*, & à puncto *I* per centrum iterum acta linea, erit in peripheria datum ſignum *L*, & eſſe id quæſitum progreſſu oſtendetur. Ex punctis *B*, *C* iungantur ad *L* lineæ *BL*, *CL*, triangulum *BLC* habebit baſim ſectam in *A* data R ad S ratione; agatur *IP* æquidiſtans *LB*, & iuncta *CSO*, quoniam *NH*, *NI* fuerant æquales, & duæ *HL*, *IO* portiones ex aduerſo æquales, relictę etiam *NL*, *NO* fiunt ęquales, ſed *AL*, *AO* ſemidiametri, & *AC* communis, ergo duo ſunt triangula *CAL*, *CAO* ęqualia, & ſimilia, ob latera duo, & anguli comprehenſi ęquales, & aſſumptis rurſus portionibus *HL*, & *OI* à ſemicirculis *HSO*, *LPI*, ſi communis arcus LS ſubducatur, erunt relicti arcus SO, PI, ęquales, à quibus ablatus iterum communis *OP*, relictę

lictę portiones *SP*, *OI* æquantur: sed *IO* est æqualis *HL*; ergo *HL*, *SP* æquales, ac communis *LS* susceptus arcus erunt compositi *HS*, *LP* arcus iterum ęquales, quo circa insistentes anguli *LIP*, *HOS* erunt æquales: at *LIP* erit coalterno *BLI* æqualis ob æquidistantiam *BL*, *IP*, & angulus *HOS* ostensus fuit æqualis *CLI*; ergo duo anguli *BLA*, *CLA* æquales fiunt, & dirimitur totus verticis angulus *BLC* bifariam á diametro, seu semidiametro assumpta ęquali lineę datę *G*: ergo habet triangulum *BLC* conditiones requisitę, & factum erit quod oportuit:

SCHOLIVM.

EFfectio pręmissi problematis vniuersalior videtur quàm inducta ab antecessoribus, quę sic se habet. Data sit pro base *BC* secta in *A* pro ratione data *R* ad *S*, & linea bisecans angulum verticis sit *G*, vt prius. Protrahatur *BC* in *D*, vt eadem sit ratio *BD* ad *DC*, quę *R* ad *S*, seu *BA* ad *AC*, & scripto super *DA* semicirculo, in eo ponatur *AE* ęqualis *G*, & connexis *BE*, *CE*, *DE*, fiet triangulum quęsitum *BEC*, nam ex superius ostensis anguli *BEA*, *AEC* sunt ęquales,



& conditiones reliquæ expletæ ; verum constructio hęc sit conditionata, vbi opus est, data *G* externa, fiat minor ipsa *AD*, aliàs triangulum haud constituetur; poterit adhuc vniuersalis ita proponere.

PROBLEMA DVODECIMVM

Data linea pro base, ratione laterum, & magnitudine linea bisecante angulum verticis inuenire triangulum.

SEcetur linea basis *BC* in *A* in ratione data *R* ad *S*, & in *CAD* diametro, facta nempe *AD* ęquali *AC*, semicirculus scribatur *CED*, erit *DB* differentia partium: fiat deindè vt *AB* ad *BD*, ita data externa ad aliam, & sit *DE*, in circuloq; aptata, agatur per *E* pũctum ex *B* indefinitè linea; porro ex *A* eleuetur linea ęquidistans *DE*, & sit *AF*, quę occurrat *BE* in *F* puncto, cui iungatur *CF*, & *CE*. Dico triangulum *BFC* esse quęsitum, ob rectum *CED*, erit & rectum *CHA*, diuisaque bifariam *CE* in *H*, & communis *HF*, vndè fit quòd *FE*, *FC* sint ęquales, & angulus *CFE* bisectus, cum-

que

que ſit, vt *AB* ad *DB*, ita *FB* ad *BE*, & per conuerſionem *BA* ad *AD*, vt *BF* ad *FE*, & *AD* ad *AC*, vt *EF* ad *FC*; ex æquo igitur erit, vt *BF* ad *FC*, ita *BA* ad *AD*, ratio laterum eadem, quæ baſis ſegmenta: factum igitur, quod oportuit, & ſequebatur ex ipſa *BFC* anguli biſectione vt in elementis patet.

SCHOLIVM.

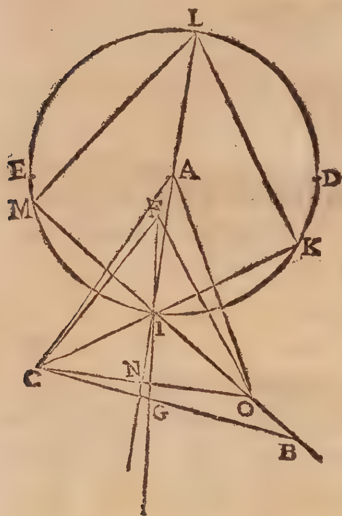
EXhibita, ni fallor, ſunt ſymptomata omnia de reflexionis puncto in caua peripheria circuli, plani ſcilicet ſecantis conum, ſeu cylindrum, & quo ad illud punctum communicat circulus cum ſectionibus cæteris, adeo vt facilè ad omnes alias extendiqueat præmiſſa doctrina, verum integrè ad argumentum minime ſatis fuerit factum, niſi ſubrogetur pro conuexis vnum, vel alterum problema, in ijs tot diſcrimina caſuũ ob puncta non contingunt. Sit igitur

PROBL. DECIMVMTERT.

Dato circulo, & duobus punctis à centro inæqualiter diſtantibus, inuenire reflexionis punctum in conuexa peripheria.

SInt *B*, *C* puncta poſitione poſſibili ad circulum circa centrum *A*, & ſignentur *D*, *E* puncta contactus, ipſæ vero lineæ *BD*, *CE* ad angulum inclinen-

tur *BFC*, quem bifariam diuidat linea *FIG*. Dico quod *I* punctum in peripheria eſt quæſitum, nempè ductis *BIM*, *CIK*, angulus *BIC* biſecari à diametro, producta *AIN*, & portiones *IM*, *IK* æquales in circulo fieri: ſumantur *AC*, *AO* æquales, & iungatur *CO*, erunt triangula *AIC*, *AIO* æqualia, & ſimilia, nam duo quadrata *AI*, *IC* vna cum facto bis ſub *AIN* oblongo æquantur *AC* quadrato, hoc eſt *AO*; cui reſpondent reſolutæ partes *AI*, *IO* quadrata vna cum facto bis ſub *AIN* rectangulo; ergo ſublatę ſub vna denominatione partes *AI* quadratum, & bis facto ſub *AIN*, relinquũtur *CI*, *IO* duo quadrata æqualia, & ipſa latera: ergo anguli *ICO*, *IOC* æquales, & æquales erant in altero Iſoſcele *ACO* anguli *ACO*, *AOC*, à quibus ſublati partiales relinquuntur æquales *ACI*, *AOI*, & triangula *AIC*, *AIO* erunt trium æqualium laterum omnino ſimilia, & æqualia, & linea *AIN* fiet ſuper *CO* ad rectos angulos; igitur duo triangula *CIN*, *OIN* partialia erunt ſimilia, & æqualia, vnde angulus *OIC* erit biſectus à continuata diametro *AIN*, ſiue anguli verticales in circulo *AIM*, *AIK* æquales



inter

inter se, ergo arcus *LM*, *LK* æquales veluti *MI*, *KI*; & est *OI* vna linea cum *BI*, ergo factum est quod oportuit.

PROBL. DECIMVMQVART.

Datis ijsdem, aliter idem reflexionis inuenire punctum.

SInt B, C puncta data, circulus vt prius circa A centrum, & puncta tangentium ex aduerso notentur, ex *B* in *E*, & ex *C* in *H* lineas duci non oportet, arcum comprehensum duobus punctis *HE* secabimus ęqualiter, at linea ducetur per centrum, nempè *LAIN*. Dico punctum *I* esse illud reflexionis quęsitum: ducantur *BIF*, *CIK*, et *BC*, porro sumatur *AC* ęqualis *AO*: erunt triangula *ACO*, *CIN* isoscelia, et diuiduntur per *AN* diametrū continuatam in partialia *ANC*, *ANO*, et *INC*, *INO* ęqualia, et similia. nam ex ęqualitate *AC*, *AO* ostendentur vt supra similia, & ęqua-

ęqualia AIC, AIO triangula, per resolutionem ex duodecima Secundi, nec non et similia, et ęqualia alia duo triangula *ICN*, *ION*: sed *BOI* est linea vna continua, ergo à datis punctis *B*, *C* angulus reflexus in conuexa fit peripheria *BIC*, á diametro bisectus; quare I punctum erit reflexionis quęsitum.

SCHOLIVM.

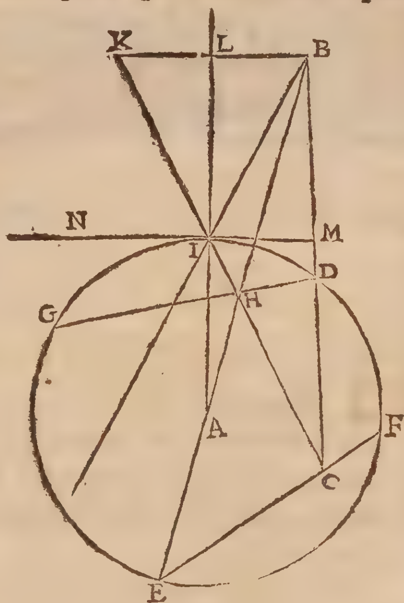
SEquitur quod LIF, LIK verticales sunt pares, vnde et lineę in circulo adplicatę ęquales IF, IK, vt sunt reliquæ LF, et LK. Cæterum hìc alias construendi formas lubentes omittimus, quum parum à præmissis differant; superest adhuc vt aliud construamus problema plurimum ab authoribus exagitatum, ac tandem quum extra naturæ præmerent vestigia cum Geometriæ probro ad mechanicum se receperant subsidium, habetur ab Halahazen libro 5 propositione 36., et à Vitellione libro primo propositione 135, at spectasse ad ditionem geometriæ paucis sumus comprehensuri. Sit itaque

PRO-

PROBL. DECIMVM QVINTVM

Datis duobus punctis, vno in circulo, alio extra, vel vtroque extra circulum, possibile est inuenire punctum in circumferentia dati tirculi, ita vt angulum contentum à lineis à prædictis punctis, ad punctum inuentum ductis diuidat per æqualia linea in illo puncto circulum contingens. est Vitellionis 135 primi.

SINT data puncta *B* extra, *C* intra circulum cuius *A* centrum (casus reliqui sequentur infra) oporteat duas ad circumferentiam inflectere lineas, & angulum quem facient, bifariam dirimat contingens linea eodem pũcto erecta. Iungantur lineæ *BC*, qua circulus secabitur in *D*, & *BA* per cẽtrum, & secabitur altero punctorum in *E*, agatur *ECF* linea ex duobus punctis datis, & eidem æqualis aptetur ex *D* dato linea *DG*, qua secabitur *BGE* in *H*, & per hoc punctum si ducatur ex *C* linea



linea dabit in peripheria punctum *I*. Aio hoc ſigno effici quæſitum, nempè inclinatis lineis *CI*, *BI* angulum bifariam diſpeſcere contingens linea circulum in eodem puncto *I* erecta, quod ſic demonſtratur. Accipiatur *I*K in porrecta *CI*, æqualis *BI*, & continuata ex centro *AI* offendet in connexam *B*K in puncto *L*; cum autem *MI* contingat, angulus rectus erit *AIM*, vt etiã *LIN*, & in iſoſcele *BIK* anguli ſupra baſim *BK* ſiunt æquales; ergo duo triangula *BIL*, *LIK* duo latera *BI*, *IL*, & *IK*, *IL* æqualia habentia, & eidem lateri oppoſita; ergo ſimilia, & æqualia erunt eadem triangula *BIL*, K*IL*: quare & parallelæ ſunt *BK*, *MI*. Ideò latera *CB*, *CK* in triangulo *CB*K ſecta erunt analogicè, & vt *CM* ad *MB*, ita *CI* ad *I*K, hoc eſt *CI* ad *IB*; ſecatur baſis *CB* in ratione *CI*, *IB* laterum, ergo per elementum 3 libri 6 angulus *BIC* ſecatur bifariam abs *MI* æquidiſtante baſeos. Quod fieri fuerat imperatum.

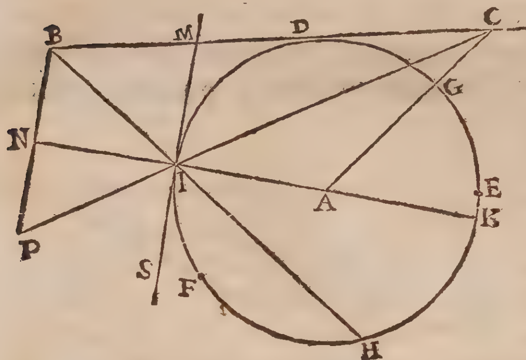
ADNOTATIO.

HInc conſpici facilè eſt tum intra, tum extra punctum reflexionis fieri commune; immò ex B in *C*, aut è contra idem commune adhuc haberi, & ex eo quod angulus *BIC* à tangente bifariam ſecatur argumentum inſurgit, quod angulos contactus non ſit penitus nihil.

Secundus ſit caſus cum linea iungens puncta *BC* tota ſupra, ſiue extra circulum cadit, vt in proximo ſchemate; agantur ad *A* lineę *CA*, *BAG*, deinde ex *B*, *C* ſignen-

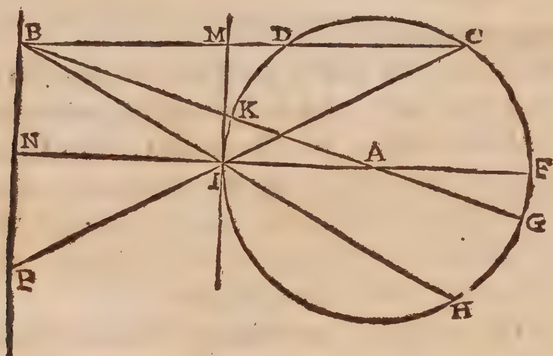
C ſignentur tangentium (ſi ducerentur) circulum puncta D, *E* ad eandem partem, & iuncta, ſiue diſtantia accepta *DE*, ex *G* puncto in circulo ponatur, erit *GI* (neque hæc ducta eſt linea) vel ſanè ducta altera diametro *DAO*, abs quadrato huius ſi auferri cõcipiatur quadratũ cordæ *DE*, relinquentur cordæ arcuum *DI*, *LO* æquales: vel facilius aſſequetur punctum ſi diametro ducta ex altero tangentium puncto *D*, vt *DAO*, & diſtantia *OE* ad aliud punctũ *E* ponatur in *GL*, & ex *LAI* erit in arcu *I* punctum, ſeu *OE* in KI expeditius. Quod autem ad *I* punctum ſic inuentum inclinatæ *BI*, *CI* efficiant quæſitum, productis *CIP*, *BIF*, & in ſequelam ratiocinii in priore adducti caſu, abſque eo quod iteretur, confirmare licebit.

Tertius caſus erit, cum iungens linea *BC* tangit in *D* peripheriam circuli, tunc ſint *F*, *E* tangentium puncta ex *B*, & *C*, & ducta *CA* ſecabitur in *G* peripheria; accipiatur portio *GE*, quæ in *FI* translata, dabitur punctum I efficiens problema, quodvt in cæteris poterit



rit cõfirmari.

Quartus casus erit quum alter punctorum in ipsa consistat peripheria, vt *C*, & *B* extra, tunc ductis *BC*, *BAG*, illa secabit in *D*, hæc vero in K peripheriam, & tunc minima adhuc erit difficultas, nam duplicabis *CD* in *DI*, & erit I quęsitum punctum, seu interceptæ *D*K assumens



semissem K*I* in idem recidet I punctum, & iste casus germanus fuerat in opusculo de reflexionis puncto, at ibidem schema non legitimum.

Quintus

Quintus, & poſtremus eſt caſus, quum linea iun-
gens data *BC* puncta ſecet circulum in *L*, & *O*, impera-
tum efficere; Agantur per centrum *BAF*, *CA*, & ex *B* li-
nea contingens ſit ad punctum *D* (quæ duci non opor-
tet) deinde diſtantia ex *E* puncto (vbi *CA* peripheriam
ſecat) ad punctum *D* referatur ex *F* puncto diametri

in *FI* (neque lineæ iſtæ deſignatæ habentur) Dico
puncto *I* fieri quæſitum, hoc eſt inclinatæ *BI*, *CI* ad
angulum *BIC* eundem angulum contingens *MI* biſe-
care, & expleta preparatione, vt in ſuperioribus eadem
concluſio eruetur, vt reiterari non ſit opus.

ADNOTATIO.

ITaq; hisce paucis assumpta á nobis problemata tria geometricæ ditioni fore restituta speramus, vtinã quæ ex preclaro illo opere supersunt, & eadem laborant indigentia, demum à violenta mechanicorum detentione vindicentur.

LAVS DEO.

Errata. *Corrigenda.*

Pag.	*Linea.*		*Lege.*
5	6	mouerct	mouerat
10	21	† ALQ	† ACQ
	23	HLQ	HFQ
21	2	*à fine*, ad H	ad E
27	14	*verba)* *ſic corrigantur.*	ἐπιϛημονιχῶς
30	8	*græca)*	ἐπιχειρήμασι
31	4	*à fine*, perfrui	perfici
37	17	latus DE	latus DF
42	8	H circulus	*adde* H circulus bifariã
	18	iuncta DLK	iuncta HLK
49	4	*à fine*, ſit poteſt	ſit potens
51	18	--mate ſecundo	--mate ſequente
71	6	CI . IB , IH , B	CI , IB , IN , B
	21	triens ADH	triens ADN
72	4	-- do, alterni,	-- do alternè
77	2	*verb. græc. ſic cor.*	εἰς ἄπειρον
86	2	FHF	FHC
86	10	periphari	peripheria
86	14	& LN , DC	& DN, LC
88	15	in O, pucto	in O puncto
95	13	proo liues	procliues
105	22	nequeant	queant
126	9	825 , 16	825 , 616
133	15	LBF	LBE
138	4	Tynheni	Tyrrheni

Errata

Errata.			*Corrigenda.*
Pagina	*Linea.*		*Lege.*
143	3	, & ON	& NM
148	21	A ad C	BA ad AC
163	3	ad AD	ad AC
165	6	*à fine* , CIN Itoſcelia,	CIO Iſoſcelia
167		*vltima* BGE	BAE
168	4	*à fine* angulos	angulus

PROBLEMA VINDICATVM.

Illustriss. ac Erudiss.

D. N. THEVENOT

A. SANCTINIVS S. P.

TVtelam eius causæ V. C, quæ ab omnibus habeatur plusquam deserta, siue infirmitatis omnimodè amissæ spei, curam suscipere, actiones vtique sunt ex sui natura adeò præsumptionis extremæ, quod á temeritatis nota vix per latum lineæ, quo caret, censentur distare, at quidem aliquando si videantur ad votum contingere, casui meritò oporteat adscribi: illarum scilicet processus nullum ex arte post se relinquunt vestigium. Ego quippè vel in eorum altero suspicabar incidissem discriminis momento, ex quo in animum versabar, aduersus omnium placitum, ex viribus Geometriæ liceret hauriri rationes pro constructione problematis, cuius argumentum in præmisso fecimus libello, & quia ad secundum eius problema, in quadam notatione, & de altera methodo specimen reliquimus, absque eo quod per omnem differentiam casus explicarentur, visus sum porrò nullam impostерum contingere posse oportunitatem magis congruam illud perficiendi, quám si vna simul ederentur, quare & post reliqua typis expressa tuo nomini hæc pauca nuncupari libuit, vt mea erga te obsequia; quibus ob noxium me tua fecerat humanitas, & excitarem, & simul publicè attestata euulgarem, quod sanè nil minus fore ingratum tibi suadeor.

Cæterum quàm maximè mihi incumbebat, ob

nimiam

nimiam plurium importunitatem aliquid rationis exponere cur pro exiguo hoc opuſculo permiſerim tam adeò enormes Editio imploraſſet morarum inducias, immò ſuper addam, me non ſemel in eam deſcendiſſe cogitationem, quod vel ad euitandas moleſtias, vel ne actum elegantius inutiliter alij æmularentur, ſatius fuiſſe ſupprimi quam luci committendum, ratio cogitatus eiuſmodi fuerat, monitum à multò receptum tempore. In Belgio expediri ſub prælo rerum geometricarum ingens volumen, cui impoſitum fronti inter Heracleas (*Plus vltra circuli quadratura*) ex circum lato folio cernere licuit, vndè non ne debueram tunc concipere exequatam fuiſſe priùs lacunam hanc, à viro ſcilicet eruditiſſimo, & ad labores geometricos ſuſtinendos vtiq; nato, ac ad Zetesim omnibus numeris inſtructo? Interim allata exemplaria cum euoluerem occurro ad propoſitionem 158. libri octaui, vbi fusè de proportionalitatibus, & in Corollarium ibidem inter alia ſequentia ſunt verba mihi fol. *946*.

„ *Ita partitio rationis, vt peripheriæ in tres æquas*
„ *partes, adhuc in Geometricis deſiderari.*

Paulò poſt Romæ editum fuit aliud geometricum opus, cui author, haud doctrina minus, quam genere clariſſimus, titulum fecerat, Hemiſpherium diſſectum, in eo reperio ferè ad calcem ſuæ anacephaleoſeos, mihi fol. 240 (fortè ex ſerie *236*) hæc ſequentia verba.

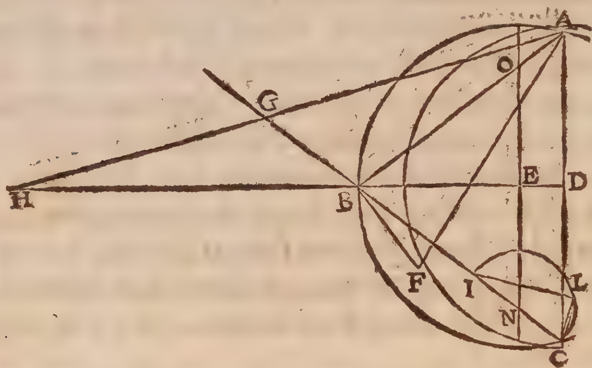
„ *Manifeſta ſatis ex præmiſſis apparet ratio, quare*
„ *multa problemata non ſunt demonſtranda per media*

„ *plana, vel Euclidis elementa.* E paulo infra. *natu-*
„ *ra enim non permittit, quod per triplicem rationem ipsa*
„ *fecerit, per duplicem resoluatur.*

Et hisce quidem videtur vlterius aliquatenus progredi ad infirmandum primarium geometriæ genus, cæterum absq; controuersia est non sufficere Euclidis pro latitudine facultatis, at exquiri aliorum elementa. Neque videntes alios (nescio an proprius dixerim exscriptores quam auctores) quiescere à repetendis antiquorum geometriæ inuisis, tandem vt nostra aspiciat lucem permissimus, quid verò de exitu, non est meum enunciare, quò ad iudicatum methodum est vt sequitur & quidem

Problema controuersum iam nosti.

Sint datæ *BG*, *HG* angulum *HBG* efficientes recto minorem, præfinita *AB* intercipienda, vt pertineat ad *A* punctum datum, Demittatur in *BD* ex *A* perpen-



dicularis concurrens cum *GB* in puncto *C*, erit trian-

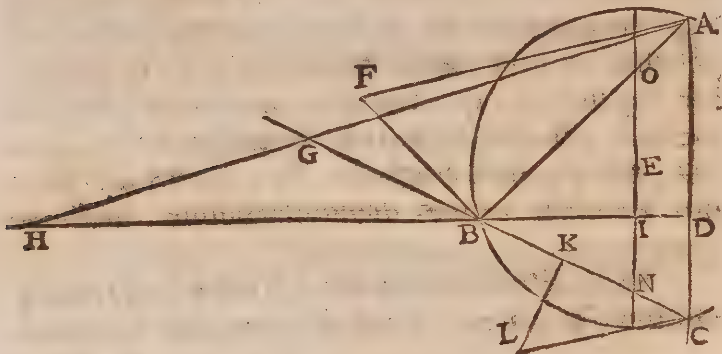
gulum

gulum *ABC* circa quod ſcribatur circuli portio; (& hucvſque omnibus infra figuris communis fiet conſtructio) quæ ſuſcipiet angulum *ABC* acutum, obtuſum, vel denique rectum, ſit in prima figura angulus acutus, & *AD* cadat ſuper lineam euntem per centrum *E*, quare Iſoſceles erit triangulum *ABC*, cui Baſi, *AC* æquidiſtet diameter per E*N*, quæ ſecabitur in *NO* á lateribus trianguli, & reſectæ portiones in vnam lineam poſitæ *CI*, ab eius quadrato auferatur quadratum *DE* diſtantiæ ſcilicet à diametro, & quod reliquum eſt *IL*, augeatur quadrato *AB*, & horum ſumma poſſit linea *AF*, hæc ex *D* puncto bis ponatur in *DB*, vt acquiratur *H* punctum, quo connexo cum *A* dato, linea ſic inclinata relinquet ſui partem interceptam *HG*, inter *BG*, *BH* æqualem præfinitæ *AB*, quod infra vnica pro omnibus caſibus demonſtrabimus methodo geometrica.

Secundò perpendicularis *A D* cadat in *BD* inter *E* centrum, & *A* in eodem angulo acuto *ABC* (communia cũ præmiſſo non repetimus) in hoc caſu; ex quadrato aggregati linearũ *CN*, *AO*, hoc eſt *CK* ſi quadratum

dratum auferatur duplæ *DI*,& fiat quadratũ *KL* relicti æquetur *BF*, quod quidem auctum quadrato *AB*, illaq; potens ſit linea *FA* ponenda ex *D* bis ſuper *DB*, & habebitur *H*, ad quod iunctum *A*, linea illa iungens quęſitum præſtabit.

Tertio *AD* cadat ſuper eductam *BD* infra centrum *E* in angulo ſimiliter acuto *ABC*, tunc quadrata, iniunctæ lineæ *NC* † *AO*, vna cum quadrato duplæ



DI, nempè quadratum *CL* augeatur quadrato *AB*, vt linea potens ſit *AF*, quæ ponatur ex *D* bis ſuper *DB*. aſſequetur punctum *H* pro ratione quæſiti idoneum.

Quarto deindè in triangulo *ABC* angulum obtuſum efficiens, & cum Iſoſceles fuerit cadet *AD* perpendicularis in centro ſiue *D* lineæ per centrum tranſeuntis, & ducta diameter æquidiſtans *EL*, iungatur *BL* ſecans *AC* in *N*, in hoc caſu differentia quadratorum *NL*, *DE* ſit ipſa *BF*, cuius quadratum auctum *AB*

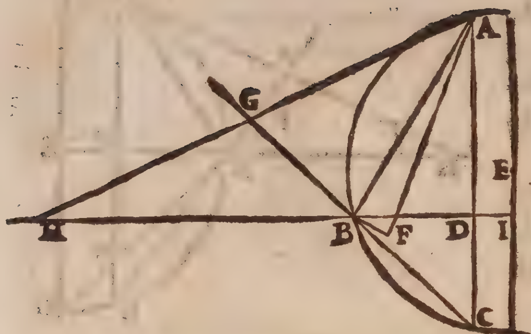
qua-

quadrato, illa duo potens erit *AF* linea ponenda ex *E* puncto bis super *DB*, & exiet *H* quæsirum.

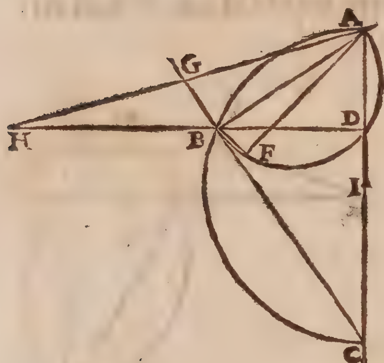
Quinto in angulo pariter obtuso *AD* perpendicularis supra *BD* cadat inter E centrum, & *A*, acta *EI* diametro æquidistans *AC* basi trianguli *ABC*, tunc iungatur *DE*, cui quadrato addito ipsi *AB* quadrato, erit eadem iuncta *AF* potens illa ponenda bis ex puncto *I*, & dabit *H* quæsitum punctum.

Sexto adhuc in angulo obtuso, quum super *BD* infra centrum *E* cadat *AD*, perpendicularis, vt in figura sexta, & diametro ex *D* ducta æquidistante *AC*, eo casu quadratum *AB* augeatur quadrato *BF*, æquali *DI*, & *FA*, vt in cæteris posita bis super *I* puncto in linea *DB*, dabit idem *H* quæsitũ.

Septi-



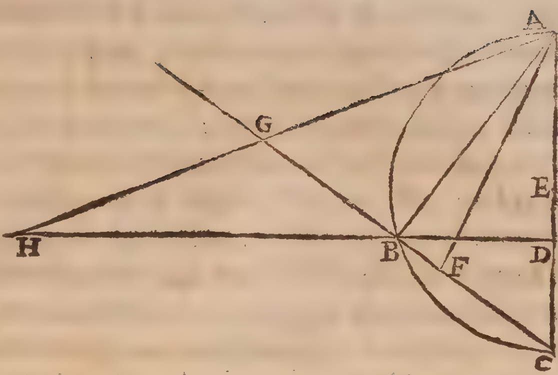
Septimo in angulo *ABC* recto triangulum sit scalenũ, vt cadat perpendicularis *BD* super diametrum *AC* inter centrum & punctum *A*, eo casu à quadrato *AB* auferatur semissis quadrati *DI* sit *BF*, & reliqua *AF* potens residuũ ponatur de more bis ex *D* super eandẽ *DB*, & signabitur *H* punctum quæsitũ ad problema, vt supra.



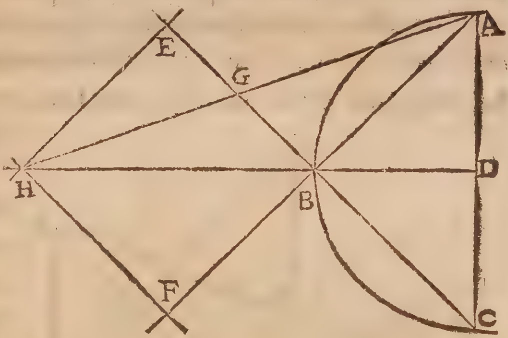
Octauo, vlterius in eodem angulo recto *ABC* trianguloque pariter scaleno *BD* super *AC* perpendicularis cadat infra *E* centrum, & punctum *C*, quo casu opus erit quadratum *DE* distantiæ à centro addere quadrato *AB*, & linea totum potens *AF*, posita super *DB*, bis exhibebit *H* quæsito idoneum.

Po-

Postremũ in angulo similiter recto *ABC*, vbi perpendiculares *BD*, *AD* in centro cadunt, in triãgulo Isoscele *ABC*, vt habeatur *H* punctum, ab ipsa natura habetur, vel modica adhibita analysi; dupla enim *AB*



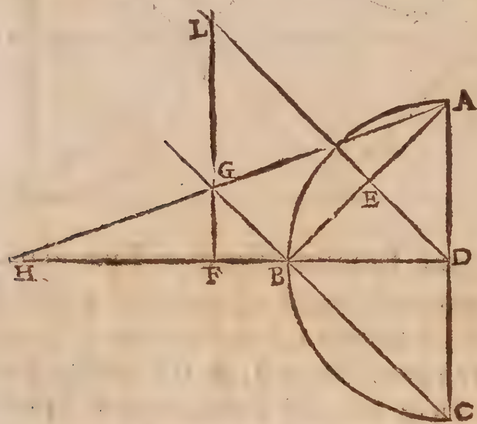
super diametrum *DB*, ostendit *H* pũctũ, ad quod inclinata *AH* eius pars inter positas *HB*, *GB*, ęqualis fit ipsi *AB*; & quia omniũ symptomatum vna forma simplici ostendi possunt ad naturæ normam videtur haberi, cuius genium est per quã breuissimè operari. In adiecta igitur figura ex *H* puncto binę agantur *HE* parallela *AB*, & *HF* pariter parallela *BG*, & productę *BG*, *AB* concurrant in *F* pun-



B cto

ᵭo, vt *HE*, & *BG* in *E*, erit *B E H F* parallelogrammum, & triangula tria *AFH*, *ABG*, *HEG* ſimilia ob angulos æquales ex vi parallelarum, ergo per 2, & 6. libri 6. *HE* eſt ad *HG*, vt eadem *HE*, ſeu *BF* ad *BA*. è conuerſo igitur vna eſt ratio *HG* ad *EH*, quæ *AB* ad eandem *HE*, ſeu *BF*, & per 9. & 16. libri quinti permutando ita *HE* ad *BF*, vt *HG* ad *AB*, æquales ſunt illæ ergo & iſtę, & factum erit propoſitum, ſcilicet inter inclinatas ad angulum recto minorem, interpoſita fuit pręfinita, quæ ad punctum pertinet datum.

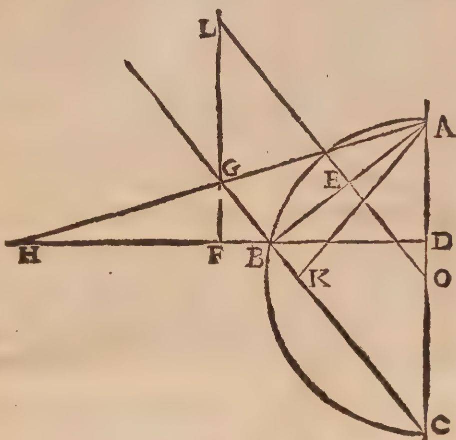
Cumq; aduerteremur eadem demonſtrationis forma, totidē alios cōprehendere caſus, ſi problema proponeretur conſtruendum per pūctum in reliqua ex inclinatis inueſtigādum vtpotè *G* per quod neceſſariò ex *A* conducta linea tranſiret, ex ipſa illectus effectionis pulchritudine, & eadē per caſus repetere non grauabor, & fortaſſe tibi V. C. & alijs minimè iniucundum fore ſperamus.



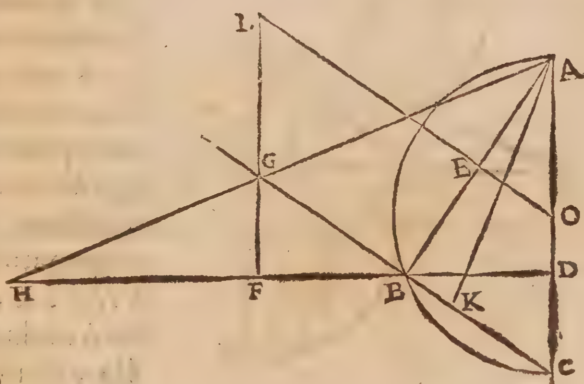
Breuiter igitur: in quolibet schemate, ex cētro circuli cuius portio quodcūq; triangulum ſibi ſuſcipit ducta eſt *E L*, ſiue *DL* parallela *B G*, & in ea ſcindenda pars fuerit

rit pro oportunitate casus. Et

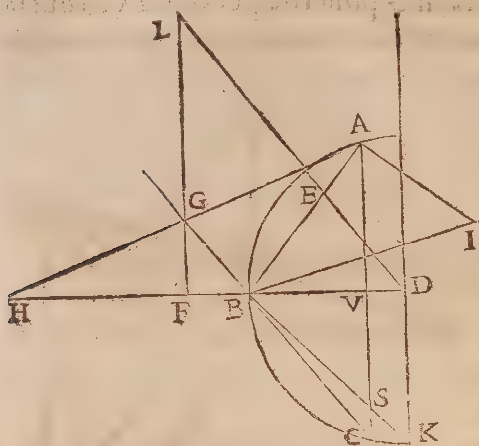
Primum in figura prima ponatur *AB* ęqualis *EL*, & ex *L* demittatur perpendicularis *LF*, super reliqua *BH*, secabitur altera in *G* puncto, per quod conducta linea *AH*, eius pars *HG* datis intercepta, erit æqualis *AB*, quod vna pro cunctis est pręmissa demonstratio, si preparetur, vt supra.



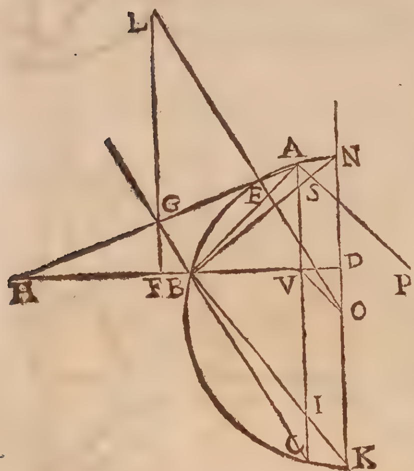
In secunda figura, angulo *ABC* pariter recto, & scaleno triangulo cuius minus latus sit *AB*, eius quadratum augeatur quadrato *DO*, & ipsa *AK* potēs ponatur in *EL*, & demissa normalis *LF* secabit *G* aptum ad quęsitū.



In tertia deinde figura eodem angulo recto, & latus *AB* sit in scaleno maius, eodem modo *DO* quadratum additum quadrato *AB*, idem *AK* in *EL*, &c.



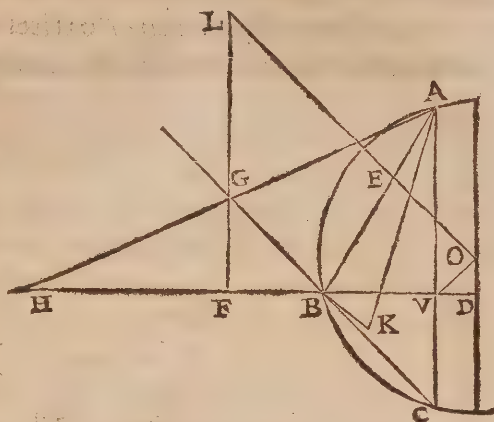
Sit in angulo obtuso *ABC* primum triangulũ Isosceles quadrato *AB* addantur duo quadrata, alterũ ex dupla *SK*, & alterum ex dupla *DV*, & sint ipsa *AI* quadratum. Iuncta ergo *BI* ponatur in *EL*, vt in quarta figura, reliqua agãtur, vt supra.



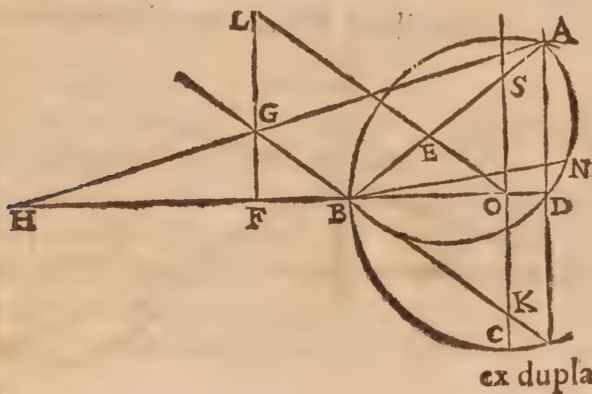
In quinta figura, & eodem obtuso angulo trianguli *ABC* latus minus sit *AB*, eius quadratum augendũ erit per duo quadrata, vnum ex adgregato linearum *SN*† *IK*, alterum verò ex dupla *VO*, sit illa, quadratum ex *AP*, li-

AP, linea igitur (si duceretur) *BP* ponenda erit in *EL* æqualis, & reliqua sequentur vt supra.

In sexta figura eodem angulo obtuso *ABC* sit latus maius scaleni *AB*, eius quadratum augeatur per quadratum *VO*, & ipsa *AK* potens abscindatur in *EL* æqualis, & cætera sequentur.



Sit porrò in angulo acuto *ABC* primùm triangulum Isosceles, vt in figura septima latus sectum *AB* opus erit minuere, quod fiet si á quadrato *AB* demantur duo quadrata, vnum ex linea dupla *CK*, alterum

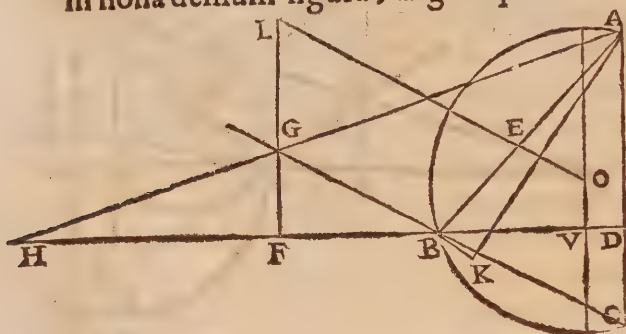


ex dupla

ex dupla *DO*, quæ duo poſſit linea *AN* (ſi ducaretur) reliqua verò *BN* ponenda erit in *EL*, vt ſint æquales, & tunc demiſſa ex *L* perpendicularis fiet quæſitũ, &c.

In octaua figura acuto pariter angulo trianguli *ABC* ſcaleni minus latus ſit *AB*, cuius quadratum ſimiliter minuendũ erit, duobus quadratis; vnum à dupla *DV*, alterum à compoſita ex *CK* ✱ *AS*, eſſet adgregatum illud (ſi duceretur linea) quod poteſt *AN* & reliquum quadratum poſſit *BN*, cui æqualis ponatur *EL* linea, quæ reliqua præſtabit, vt ſupra.

In nona demum figura, anguloque acuto trian-



guli

guli *ABC* maius latus ſit *AB* factus, ſi eius quadratum, per quadratum *DV* augeatur, linea illa potens *AK* fiet apta quæſito, ſcilicet poſita æqualis *EL*, & demiſſa normalis *LF* ſecta erit in *G* linea *BG* per quod conducta *A G H* fiet eius pars *H G* æqualis *A B*, quod faciendum proponebatur.

Præterea methodum inducere aliam; præmiſſis longè vtique concinniorem, liceret, & qua pro anguli varietate *GBH* facilè expedirentur omnia ſymptomata, ratioque demonſtrandi per æqualitatem, haud per proportionem procederet, at pro re nimium exagitata, in aliam remittimus oportunitatem; interim hoc feſtiuo lubeat epiſtolam claudi.

Eudoxus Gnidius (atteſtante nimirum Philoſopho) ægrè tulerat ab Eutocio Aſcalonita repulſam, ne in albo recenſeretur eorum, qui Geometriæ tunc indigenti ſua deprompſerant inuenta, nunc quippè vel excitatus, Principi Euclidi accurrens ſe proſtrauit, vt pro ſphalmate admiſſo ex perperam conceptæ analogiæ veniam impetraret, ac ſimul adire facultatem eidem Eutocio proteſtaturus, quod relata monumento codicis molimina illicò deleret, veluti ne dùm inefficacia, verùm pluribus non modicè noxia, etenim ob antiquitati venerandæ debitum delatumq; obſequium inhibuiſſent, quin præclara alumnorum ingenia ſuas exererent vires, cui vultu quippè hilari adnuens ipſe Princeps, & tanquam in diſciplina educatus Pythagoræa, inſuper voluit, quod authores, vt erant in albo relati ſibi ſiſterent (ſalua nihilominus in reliquis omnimoda co-

da eorum dignitate præstantia, atque sapientia) vt corã sponte faterentur, licentiosè nimis ab alumnis fuisse prolatum, Princeps ipse diminutus habuisse, doctrinam nobis relictam scilicet, nullò specimine cultoribus indicato pro duabus medijs inter extremas lineas, pro anguli trisectione plani, & huiusmodi tanquam ideò ad incitas reuocata facultas, cogeretur citra probrum à vernaculis improba emendicare subsidia, quod contrarium experitur modo elementa ex arte, vt par est, ac ritè componantur. Vale.

E tenebris autem, quæ sunt in luce tuemur.

MACERATÆ,

Apud Philippum Camaccium. 1648. *Superiorum permissu.*





